

Le motif de Rost d'une forme de Pfister *

NIELS FELD

Mai 2017

Résumé

On décrit de manière élémentaire la construction du motif de Rost d'une forme de Pfister, ce dernier trouvant son importance notamment dans la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky. Outre l'article originel de Rost ([22]), on suivra de près les simplifications apportées respectivement par Brosnan ([2]) et Karpenko ([14],[15]).

Introduction

Notre but est de décrire de la façon la plus élémentaire possible une construction du motif de Rost. En particulier, on contourne l'utilisation des *groupes de Chow à coefficients* définis par Rost et de leurs suites spectrales associées ([21]). Cela signifie aussi que les résultats ne sont pas toujours énoncés dans la plus grande généralité.

Historiquement, Rost énonça en 1990 ([20]) ses résultats concernant la décomposition motivique de certaines quadriques ; les preuves complètes ne furent rédigées que plus tard ([22], théorème 17). Le motif construit par Rost est connu pour être un élément clé dans la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky ([29], Théorème 4.5 ; [31], Théorème 4.4, voir aussi [32]).

Dans la première partie, on rappelle brièvement la théorie des formes quadratiques ([24],[18]), et ses liens avec la K -théorie et la conjecture de Milnor ([19]).

Suivant [4], la seconde partie pose les bases de la théorie de l'intersection. En particulier, on définit les groupes de Chow d'un schéma et les opérations usuelles les concernant : pullback, pushforward, produit d'intersection. Dans cette partie et dans la suite, on supposera que le lecteur est familier avec les bases de la géométrie algébrique (voir [5]).

Dans la troisième partie, on fixe le cadre dans lequel on travaille : la catégorie des correspondances de degré zéro. Suivant [2], on généralise de plus

*Mémoire de M2 encadré par Frédéric Déglise (que l'auteur remercie chaleureusement).

le produit d'intersection. Ceci permettra de démontrer une décomposition motivique d'une quadrique isotrope (21.1) et le théorème de nilpotence de Rost (21.2).

Dans la dernière partie, on construit le motif de Rost (Théorème 22.4) et on démontre ses propriétés, notamment le théorème principal de [22] (Théorème 22.5).

Le lecteur souhaitant en apprendre plus sur les motifs de quadriques pourra par exemple consulter les travaux de Vishik ([27], [28]).

Table des matières

I	Conjecture de Milnor	4
1	Formes quadratiques	4
2	K -théorie et conjecture de Milnor	5
II	Théorie de l'intersection	6
3	Conventions	6
4	Ordres des zéros et des pôles	7
5	Cycles et équivalence rationnelle	7
6	Pushforward de cycles	8
7	Cycles associés à un sous-schéma	9
8	Pullback plat de cycles	10
9	La suite exacte de localisation	11
10	$\mathbb{A}^n$ -torseurs et fibrés vectoriels	12
11	Produits extérieurs	12
12	Morphismes de Gysin	13
13	Produits d'intersection	15
III	Catégories de motifs	16

14	Correspondances	16
15	Catégories de correspondances	18
16	Motifs de Grothendieck	19
17	Le motif de Tate	20
18	Correspondances généralisées	21
IV	Construction du motif de Rost	24
19	Décomposition motivique d'une quadrique isotropique	24
20	Anneau de Chow d'une quadrique scindée	25
21	Théorème de nilpotence de Rost	28
22	Construction du motif de Rost	30
23	Unicité du motif de Rost	33

Première partie

Conjecture de Milnor

1 Formes quadratiques

Soit K un corps (commutatif) de caractéristique¹ différente de 2. Soit V un K -espace vectoriel de dimension fini. Une forme quadratique sur V est une application $\varphi : V \rightarrow K$ telle qu'il existe une application bilinéaire symétrique $B_\varphi : V \times V \rightarrow K$ vérifiant

$$(\forall x \in V, B_\varphi(x, x) = \varphi(x)).$$

L'application bilinéaire B_φ caractérise entièrement la forme quadratique φ . La forme φ est dite *non dégénérée* si aucun vecteur de V n'est orthogonal à tout l'espace V , c'est-à-dire $V^\perp = 0$.

On travaille toujours avec des formes quadratiques non dégénérées.

Une forme quadratique est toujours diagonalisable dans le sens où il existe une base de V et des éléments $a_1, \dots, a_n \in K^*$ tels que $\varphi((x_1, \dots, x_n)) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$ dans cette base. On écrira² $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Soient (V, φ) et (W, ψ) deux K -espaces vectoriels de dimension finie respectivement munis d'une forme quadratique. Un isomorphisme entre (V, φ) et (W, ψ) est un isomorphisme Θ entre les espaces V et W vérifiant $\varphi \circ \Theta = \psi$. On peut considérer l'ensemble M des formes quadratiques à isomorphisme près et définir sur cet ensemble une somme³ et un produit (tensoriel) :

$$\begin{aligned} (V, \varphi) \oplus (W, \psi) &= (V \oplus W, \varphi \oplus \psi), \\ (V, \varphi) \otimes (W, \psi) &= (V \otimes W, \varphi \otimes \psi). \end{aligned}$$

L'addition fait de M un monoïde simplifiable (voir [18], Chapitre 2, §1). On complète ce monoïde en un groupe que l'on peut aussi munir d'une structure d'anneau commutatif à l'aide du produit tensoriel. On le note $\tilde{W}(K)$ et l'appelle *anneau de Grothendieck-Witt*.

On notera $\mathbb{H} = \langle 1, -1 \rangle$ que l'on appelle *forme hyperbolique (pure)*. L'idéal de $\tilde{W}(K)$ engendré par $\mathbb{H}$ est $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{H}$, le groupe additif engendré par $\mathbb{H}$.

1.1 Définition. L'*anneau de Witt*, noté $W(K)$, est le quotient $\tilde{W}(K)/\mathbb{Z} \cdot \mathbb{H}$.

Un élément de $W(K)$ peut être représenté par une forme quadratique (V, φ) ; on peut lui associer son *degré* qui est la dimension de V modulo 2. Cela fournit un morphisme d'anneaux $W(K) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dont le noyau I est appelé *idéal fondamental des formes de dimension paire*.

On définit l'anneau gradué associé :

-
1. La théorie des formes quadratiques peut aussi être développée en caractéristique 2.
 2. Cette notation suppose le choix d'une base. Comme on travaillera à isomorphisme près, cela n'a pas d'importance.
 3. On parle de somme orthogonale et note souvent $\perp$ au lieu de $\oplus$.

$$\mathrm{gr}_I(W(K)) = \oplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}.$$

1.2. Soit (V, φ) une forme quadratique. On peut lui associer une quadrique projective $X \subset \mathbb{P}(V)$ donnée par l'équation $\varphi = 0$. Si φ est non dégénérée, alors l'hypersurface X est lisse⁴ sur K .

1.3. Soit $a \in K^*$. La *forme de Pfister associée* à a est la forme $\langle 1, -a \rangle$; on la note $\langle\langle a \rangle\rangle$.

Soient $a_1, \dots, a_n \in K^*$. La *forme de Pfister associée* aux $a_1, \dots, a_n$ est le produit $\langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \dots \otimes \langle\langle a_n \rangle\rangle$; on la note $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$.

On rappelle qu'une forme quadratique φ est *isotrope* s'il existe un vecteur non nul x tel que $\varphi(x) = 0$. Ceci est équivalent à se donner une décomposition $\varphi = \mathbb{H} \perp \psi$ avec ψ une forme quadratique ([18], Chapitre 1, Théorème 3.4).

1.4 *Définition*. Une forme quadratique φ en n variables ($n \geq 2$) est *scindée*⁵ si, dans une base adaptée, on peut l'écrire

$$\varphi = \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i y_i + z^2 & \text{si } n = 2m + 1, \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i & \text{si } n = 2m. \end{cases}$$

Dans ce cas, on dira que la variété projective associée à φ est *scindée*.

La propriété principale des formes de Pfister est la suivante :

Une forme de Pfister est isotrope si, et seulement si, elle est scindée.

2 K -théorie et conjecture de Milnor

On considère le groupe multiplicatif K^* comme un $\mathbb{Z}$ -module. L'algèbre tensorielle de K^* est

$$\mathbf{T}(K^*) = \oplus_{n \geq 0} (\otimes_{1 \leq i \leq n} K^*).$$

Celle-ci est engendrée par les éléments $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ que l'on appelle *tenseurs purs*.

La *K-théorie de Milnor* est l'algèbre quotient

$$\mathbf{K}_*(K) = \mathbf{T}(K^*) / (a \otimes (1 - a), a \in K \setminus \{0, 1\}).$$

Celle-ci est engendrée par les images des tenseurs purs appelées *symboles* et notées $\{a_1, \dots, a_n\}$.

L'application qui à un symbole $\{a_1, \dots, a_n\}$ associe la forme de Pfister $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ définit un morphisme

4. Un schéma de type fini sur K est *lisse* si, après extension des scalaires à une clôture algébrique de K , ce schéma devient un *schéma régulier*, i.e. ses tiges sont toutes des anneaux locaux réguliers.

5. *split* en anglais ([21], §2.3). La traduction est de l'auteur; on rencontre aussi le terme *hyperbolique* (*hyperbolic* en anglais) lorsque n est pair ([18], p. 10). P. Gille signale que le mot *déployé* est souvent utilisé.

$$\mathbf{K}_*(K)/(2) \rightarrow \mathrm{gr}_I(W(K))$$

appelée *morphisme de Milnor*. Il n'est pas difficile de montrer que ce morphisme est surjectif. On a en fait mieux :

2.1 Théorème. (*Conjecture de Milnor*) *Le morphisme canonique*

$$\mathbf{K}_*(K)/(2) \rightarrow \mathrm{gr}_I(W(K))$$

est un isomorphisme.

2.2 Remarque. La conjecture de Milnor est plus connue sous la forme suivante. Soit n un entier, soit μ_2 le groupe multiplicatif $\{1, -1\}$ muni de son action canonique par $\mathrm{Gal}(K_s/K)$, où K_s est une clôture séparable de K . Il existe une application canonique

$$\mathbf{K}_n(K)/(2) \rightarrow H^n(K, \mu_2^{\otimes n})$$

où le membre de droite désigne la cohomologie galoisienne. La conjecture de Milnor (démontrée par Voevodsky) affirme que ce morphisme de groupes est un isomorphisme.

Deuxième partie

Théorie de l'intersection

3 Conventions

Nous suivrons les conventions de [4]. On fixe⁶ un corps (commutatif) de base noté K . Un schéma (algébrique) sera un schéma (au sens de [5], Chapitre I, définition 2.1.2) de type fini sur K . Une variété sera un schéma intégral (c'est-à-dire irréductible et réduit)⁷. Une sous-variété sera un sous-schéma (supposé fermé, sauf mention du contraire) qui est une variété. Un point d'un schéma sera un point fermé.

On note $\mathbb{A}^d$ l'espace affine sur K de dimension d et $\mathbb{P}^d$ l'espace projectif sur K de dimension d .

On note $\mathcal{O}_{X,V}$ l'anneau local d'une sous-variété V d'un schéma X , on note $\mathfrak{m}_{X,V}$ son idéal maximal. Le corps des fonctions rationnelles sur une variété X est noté $R(X)$ (ou parfois $K(X)$), les éléments non nuls de ce corps forment le groupe multiplicatif $R(X)^*$.

6. En pratique, lorsque l'on travaillera avec des quadriques, ce corps sera supposé de caractéristique différente de 2.

7. Il est important de remarquer que nos variétés peuvent ne être pas lisses : même pour des variétés lisses, l'intersection de cycles impliquera des éclatements le long de sous-schémas non-lisses (singuliers).

4 Ordres des zéros et des pôles

Soient X une variété et V une sous-variété de X de codimension 1. L'anneau local $A = \mathcal{O}_{X,V}$ est un anneau intègre de dimension (de Krull) égale à 1. Soit $r \in R(X)^*$, on l'écrit $r = a/b$, avec $a, b \in A$. On définit l'ordre d'annulation de r le long de V par :

$$\text{ord}_V(r) = l_A(A/(a)) - l_A(A/(b)),$$

où $l_A(M)$ désigne la longueur du A -module M .

Si $r, s \in R(X)^*$, on peut vérifier que

$$\text{ord}_V(rs) = \text{ord}_V(r) + \text{ord}_V(s).$$

Si $r \in R(X)^*$ est fixé, il n'y a qu'un nombre fini de sous-variétés V de codimension 1 telles que $\text{ord}_V(r) \neq 0$.

4.1 Exemple. Soit X une variété et soit $p : \tilde{X} \rightarrow X$ sa normalisation. Si $r \in R(X)^* = R(\tilde{X})^*$, alors

$$\text{ord}_V(r) = \sum [R(\tilde{V}) : R(V)] \cdot \text{ord}_{\tilde{V}}(r),$$

où $\tilde{V}$ de $\tilde{X}$ parcourt les composantes irréductibles de $p^{-1}(V)$, et $[R(\tilde{V}) : R(V)]$ est le degré de l'extension de corps.

5 Cycles et équivalence rationnelle

Soient X un schéma et k un entier, un k -cycle sur X est une somme formelle

$$\sum n_i [V_i]$$

où les V_i sont des sous-variétés de X de dimension k et n_i sont des entiers (relatifs). Le groupe des k -cycles sur X , noté $Z_k X$, est le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés de X de dimension k ; si V est une telle sous-variété, on note $[V]$ son image dans $Z_k X$.

Soit W une sous-variété de X de dimension $(k+1)$ et soit $r \in R(W)^*$. On définit un k -cycle $[\text{div}(r)]$ sur X en posant

$$[\text{div}(r)] = \sum \text{ord}_V(r) [V],$$

où la somme parcourt les sous-variétés V de W de codimension 1 et où ord_V désigne l'ordre d'une fonction sur $R(W)^*$ défini par l'anneau local $\mathcal{O}_{W,V}$.

Un k -cycle α est *rationnellement équivalent à zéro*, noté $\alpha \sim_{\text{rat}} 0$ ou plus simplement $\alpha \sim 0$, si il existe un nombre fini de sous-variétés W_i de V de dimension $(k+1)$ et des $r_i \in R(W_i)^*$ tel que

$$\alpha = \sum_i [\text{div}(r_i)].$$

Comme $[\operatorname{div}(r^{-1})] = -[\operatorname{div}(r)]$, les cycles rationnellement équivalent à zéro forment un sous-groupe $\operatorname{Rat}_k X$ de $Z_k X$. Le groupe *des k -cycles modulo équivalence rationnelle* sur X est le groupe quotient

$$A_k X = Z_k X / \operatorname{Rat}_k X.$$

On note $Z_* X$ (resp. $A_* X$) la somme directe des groupes $Z_k X$ (resp. $A_k X$) pour $k \in \mathbb{Z}$ (on peut se restreindre à $k = 0, \dots, \dim X$). Un *cycle (algébrique)* sur X désignera un élément de $Z_* X$ voire (abusivement) un élément de $A_* X$.

Si α est un cycle dans $A_* X$ (où k est un entier), on note $\{\alpha\}_k$ les composantes de α dans $A_k X$ de sorte que

$$\alpha = \sum_k \{\alpha\}_k.$$

Un cycle est *effectif* (ou *positif*) s'il est non nul et si chacun de ses coefficients est un entier positif.

5.1 Exemple. 1. Un schéma et son sous-schéma réduit associé possèdent les mêmes sous-variétés de sorte que

$$A_k(X) = A_k(X_{\text{red}}).$$

2. Si X est une réunion disjointe de schémas $X_1, \dots, X_t$, alors $Z_* X = \oplus_i Z_* X_i$ et

$$A_k X = \oplus_i A_k(X_i).$$

3. Si X_1 et X_2 sont des sous-schémas fermés de X , alors la suite suivante est exacte :

$$A_k(X_1 \cap X_2) \rightarrow A_k X_1 \oplus A_k X_2 \rightarrow A_k(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0.$$

5.2 Exemple. Si X est de dimension n , alors $A_n X = Z_n X$ est le groupe abélien libre engendré par les composantes irréductibles de X .

6 Pushforward de cycles

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre. Pour toute sous-variété V de X , le schéma réduit $W = f(V)$ est alors une sous-variété (fermée) de Y . On possède un morphisme induit de $R(W)$ dans $R(V)$.

Montrons que l'extension de corps ainsi obtenue est finie lorsque W possède la même dimension que V (voir aussi [4], Appendice B.2.2 pour une autre justification). Il existe un ouvert dense W' dans W tel que le morphisme induit $f|_{f^{-1}(W')}$ soit à fibres finies (i.e. $\forall y \in W', f^{-1}(y)$ est un ensemble fini). Le morphisme $f|_{f^{-1}(W')}$ demeurant encore propre, on peut montrer que f est un morphisme fini (voir [6], Chapitre **III**, Proposition 4.4.2). On peut supposer l'ouvert W' affine de sorte que le morphisme induit $\mathcal{O}_{W'}(W') \rightarrow \mathcal{O}_{f^{-1}(W')}(f^{-1}(W'))$ soit une extension finie d'anneaux intègres. On obtient alors le résultat en remarquant que $R(W') = R(W)$ et $R(f^{-1}(W')) = R(V)$.

On peut alors définir

$$\deg(V/W) = \begin{cases} [R(V) : R(W)] & \text{si } \dim W = \dim V \\ 0 & \text{si } \dim W < \dim V \end{cases}$$

où $[R(V) : R(W)]$ désigne le degré de l'extension de corps. On définit

$$f_*[V] = \deg(V/W)[W]$$

que l'on étend linéairement en un morphisme

$$f_* : Z_k X \rightarrow Z_k Y.$$

Ces morphismes sont fonctoriels : si $g : Y \rightarrow Z$ est un morphisme propre, alors $(gf)_* = g_* f_*$ (cela découle de la multiplicativité des degrés d'une tour d'extensions de corps).

6.1 Théorème ([4], Théorème 1.4). *Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre et α un k -cycle sur X qui est rationnellement équivalent à zéro, alors $f_* \alpha$ est rationnellement équivalent à zéro sur Y .*

En particulier, il existe un morphisme induit

$$f_* : A_k X \rightarrow A_k Y$$

de sorte que A_* est un foncteur covariant pour les morphismes propres. Si X est un schéma complet (i.e. X est propre au-dessus du spectre $S = \text{Spec } K$ du corps de base) et si $\alpha = \sum_P n_P [P]$ est un zéro-cycle sur X , alors le *degré* de α , noté $\deg \alpha$, est défini par

$$\deg \alpha = \sum_P n_P [R(P) : K].$$

Autrement dit, $\deg \alpha = p_*(\alpha)$ où p le morphisme structural $X \rightarrow S$ et $A_0(S)$ est identifié avec $\mathbb{Z}$. D'après le théorème précédent, on peut étendre le degré en un morphisme

$$\deg_X : A_* X \rightarrow \mathbb{Z}$$

en posant $\deg_X \alpha = 0$ si $\alpha \in A_k X$ avec $k > 0$.

6.2 Remarque. Soient $Y_1, \dots, Y_r$ des sous-schémas fermés d'un schéma X . Soit Y un sous-schéma fermé de X contenant tous les Y_i . Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in A_* Y_i$ et $\beta \in A_* Y$, on écrira parfois (abusivement) $\beta = \sum_i \alpha_i$ à la place de $\beta = \sum_i \varphi_{i,*}(\alpha_i)$ où φ_i est l'inclusion de Y_i dans Y .

7 Cycles associés à un sous-schéma

Soit X un schéma et soient $X_1, \dots, X_t$ les composantes irréductibles de X . Les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X, X_i}$ sont artiniens (i.e. de dimension 0 car noethériens). La *multiplicité géométrique* m_i de X_i dans X est définie par la longueur de $\mathcal{O}_{X, X_i}$ (en tant que module sur lui-même) :

$$m_i = l_{\mathcal{O}_{X, X_i}}(\mathcal{O}_{X, X_i}).$$

Le cycle (fondamental) $[X]$ de X est

$$[X] = \sum_i m_i [X_i].$$

On le voit comme un élément de Z_*X . Par abus, on note aussi $[X]$ son image dans A_*X . Si le schéma X est équidimensionnel de dimension k , alors $[X] \in Z_kX$. Dans ce cas, $Z_kX = A_kX$ est le groupe abélien libre engendré par $[X_1], \dots, [X_t]$.

Si X est un sous-schéma fermé d'un schéma Y , alors $Z_*X \subset Z_*Y$ et on écrit aussi $[X]$ pour l'image de $[X]$ dans Z_*Y et dans A_*Y .

8 Pullback plat de cycles

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme plat⁸. Les exemples cruciaux sont les suivants :

1. Une immersion ouverte ($n = 0$).
2. La projection d'un fibré vectoriel, ou d'un $\mathbb{A}^n$ -torseur, ou d'un fibré projectif, sur sa base.
3. La projection d'un produit cartésien $Y \times Z$ sur le premier facteur, où Z est un schéma équidimensionnel de dimension n .
4. Un morphisme dominant d'une variété de dimension $n + 1$ vers une courbe singulière.

Pour un tel morphisme $f : X \rightarrow Y$ et pour toute sous-variété V de Y , on pose :

$$f^*[V] = [f^{-1}(V)],$$

où $f^{-1}(V)$ est le schéma image réciproque (c'est un sous-schéma de X de dimension $\dim(V) + n$ car f est de dimension relative n), et $[f^{-1}(V)]$ est son cycle associé. On étend cette flèche linéairement en

$$f^* : Z_kY \rightarrow Z_{k+n}X.$$

8.1 Lemme. *Si $f : X \rightarrow Y$ est plat, alors pour tout sous-schéma Z de Y ,*

$$f^*[Z] = [f^{-1}(Z)].$$

8.2 Proposition. ([4], Proposition 1.7) *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

8. Par convention, nos morphismes plats seront toujours supposés de dimension relative n , où n est un entier fixé

un carré cartésien, où g est plat et f propre. Alors g' est plat, f' est propre et, pour tout $\alpha \in Z_*X$,

$$f'_*g'^*\alpha = g^*f_*\alpha$$

dans Z_*Y' .

8.3 Théorème. ([4], Théorème 1.7) Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme plat (de dimension relative n), et α un k -cycle sur Y qui est rationnellement équivalent à zéro. Alors $f^*\alpha$ est rationnellement équivalent à zéro dans $Z_{k+n}X$.

Ainsi, il existe un morphisme *pullback* $f^* : A_kY \rightarrow A_{k+n}X$ de sorte que A_* est un foncteur contravariant par rapport aux morphismes plats.

9 La suite exacte de localisation

9.1 Proposition. Soit Y un sous-schéma fermé d'un schéma X et soit $U = X \setminus Y$. Soient $i : Y \rightarrow X, j : U \rightarrow X$ les inclusions canoniques. Alors la suite

$$A_kY \xrightarrow{i_*} A_kX \xrightarrow{j^*} A_kU \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout entier k .

Démonstration. La composée j^*i_* est nulle par définition sur les cycles. Comme toute sous-variété V de U s'étend en une sous-variété $\bar{V}$ de X (en prenant l'adhérence), l'application j^* est surjective. Pour finir, on se donne un cycle α dans Z_kX tel que $j^*\alpha \sim_{\text{rat}} 0$. Il existe alors des sous-variétés W_i de U et des éléments r_i de $R(W_i)^*$ tels que

$$j^*\alpha = \sum [\text{div}(r_i)].$$

Comme, pour tout i , $R(W_i) = R(\bar{W}_i)$, les r_i correspondent à des fonctions $\bar{r}_i$ sur $\bar{W}_i$, et

$$j^*(\alpha - \sum [\text{div}(\bar{r}_i)]) = 0$$

dans Z_kU . On voit alors que

$$\alpha - \sum [\text{div}(\bar{r}_i)] = i_*\beta$$

pour un certain β dans Z_kY . D'où le résultat en passant au quotient. $\square$

10 $\mathbb{A}^n$ -torseurs et fibrés vectoriels

Un schéma E muni d'un morphisme $p : E \rightarrow X$ est un $\mathbb{A}^n$ -torseur (de rang n) sur X si X peut être recouvert par des ouverts U_α tel qu'il existe des isomorphismes

$$p^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \mathbb{A}^n$$

de sorte que p restreint à $p^{-1}(U_\alpha)$ correspond à la projection canonique de $U_\alpha \times \mathbb{A}^n$ vers U_α . Lorsque les flèches de transition sont linéaires (au sens de [8], Paragraphe 5.18), on parle de *fibré vectoriel* (voir aussi [5], Chapitre I, Proposition 9.4.9).

10.1 Proposition. *Soit $p : E \rightarrow X$ un $\mathbb{A}^n$ -torseur. Alors le pullback plat*

$$p^* : A_k X \rightarrow A_{k+n} E$$

est une surjection pour tout entier k . Si de plus le morphisme p est un fibré vectoriel, alors p^ est un isomorphisme pour tout k .*

En particulier, $A_k(\mathbb{A}^n) = 0$ si $k < n$, et $A_n(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Z}$.

10.2 Exemple. Soit L^k un sous-espace $\mathbb{P}^n$ de dimension $k \in \{0, \dots, n\}$.

1. Le groupe $A_k(\mathbb{P}^k)$ est engendré par $[L^k]$ (utiliser 9.1 avec $X = \mathbb{P}^n$, $Y = L^{n-1}$ et $U = \mathbb{A}^n$).
2. Le groupe $A_k(\mathbb{P}^n)$ est $\mathbb{Z}[L^k] \simeq \mathbb{Z}$.

11 Produits extérieurs

Soient X, Y deux schémas (sur le même corps de base K), notons $X \times Y$ le produit cartésien de X et Y au-dessus de $\text{Spec}(K)$. Le *produit extérieur* sur les cycles

$$Z_k X \otimes Z_l Y \rightarrow Z_{k+l}(X \times Y)$$

est défini par la formule

$$[V] \times [W] = [V \times W],$$

où V, W sont des sous-variétés de X et Y respectivement. Si le corps de base K n'est pas algébriquement clos, le produit $V \times W$ peut ne pas être irréductible ; son cycle $[V \times W]$ est défini dans la Section 7.

11.1 Proposition. 1. Si $\alpha \sim 0$ ou $\beta \sim 0$, alors $\alpha \times \beta \sim 0$.

2. Soient $f : X' \rightarrow X, g : Y' \rightarrow Y$ deux morphismes, soit $f \times g$ le morphisme induit de $X' \times Y'$ vers $X \times Y$.

(a) Si f et g sont propres, alors $f \times g$ l'est aussi et

$$(f \times g)_*(\alpha \times \beta) = f_* \alpha \times g_* \beta$$

pour tout cycles α sur X' et β sur Y' .

(b) Si f et g sont plats de dimension relatives m et n respectivement, alors $f \times g$ est plat de dimension relative $m + n$, et

$$(f \times g)^*(\alpha \times \beta) = f^*\alpha \times g^*\beta$$

pour tous cycles α sur X et β sur Y .

On en déduit un *produit extérieur* sur les classes de cycles

$$A_k X \otimes A_l Y \rightarrow A_{k+l}(X \times Y)$$

pour tout entiers k et l .

Ce produit extérieur est associatif :

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$$

pour tous $\alpha \in A_* X, \beta \in A_* Y$ et $\gamma \in A_* Z$.

12 Morphismes de Gysin

Une immersion fermée $i : X \rightarrow Y$ entre schémas est une *immersion fermée régulière de codimension d* si tout point de X possède un voisinage affine U dans Y , tel que l'idéal de l'anneau $\mathcal{O}_Y(U)$ définissant X dans Y est engendré par une suite régulière de longueur d (cf [4], Appendice A, Lemme 6.1 ; [7], Chapitre 0, §15).

Soit alors $i : X \rightarrow Y$ une immersion fermée régulière de codimension d . Si $\mathcal{I}$ est l'Idéal de X dans Y , alors le faisceau (dit *conormal*) $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est localement libre de rang d sur X . Le *cône normal* de X dans Y est par définition

$$C_X Y = \text{Spec}(\oplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}).$$

Celui-ci est canoniquement isomorphe au fibré normal $N_X Y$ ([4], Appendice B.7.1). Notons $C = C_X Y$. On fixe un entier k . Il est possible (voir [4], Proposition 5.2) de définir un morphisme

$$\sigma : A_k Y \rightarrow A_k C$$

qui vérifie $\sigma[V] = [C_{V \cap X} V]$ au niveau des cycles.

Si l'on voit C comme un fibré vectoriel au-dessus de X , on définit le morphisme

$$s^* : A_k C \rightarrow A_{k-d} X$$

comme étant l'inverse de l'isomorphisme de la Proposition 10.1.

Finalement, on définit le *morphisme de Gysin*

$$i^* : A_k Y \rightarrow A_{k-d} X$$

comme étant la composition $i^* = s^* \circ \sigma$:

$$A_k Y \xrightarrow{\sigma} A_k C \xrightarrow{s^*} A_{k-d} X.$$

12.1 Théorème. ([4], Proposition 6.2) On considère le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i'} & Y' \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

avec i une immersion fermée régulière de codimension d .

1. (Pushforward) Si p est propre et si p est transverse à i (i.e. i et i' sont des immersions fermées régulières de même codimension), alors i' est une immersion fermée régulière et q est propre. De plus, si $\alpha \in A_k Y'$, alors

$$i^* p_*(\alpha) = q_* i'^*(\alpha)$$

dans $A_{k-d} X$.

2. (Pullback) Si p est plat de dimension relative n , alors i' est une immersion fermée régulière et q est plat. De plus, si $\alpha \in A_k Y$, alors

$$i'^* p^*(\alpha) = q^* i^*(\alpha)$$

dans $A_{k+n-d} X'$.

12.2 Proposition. ([4], Proposition 6.5) On considère la suite suivante

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z.$$

1. On suppose que i est une immersion fermée régulière de codimension d , et que p et pi sont plats de dimensions relatives n et $n - d$ respectivement. Alors pour $\alpha \in A_k Z$:

$$(pi)^*(\alpha) = i^*(p^* \alpha) = i^* p^* \alpha$$

dans $A_{k+n-d} X$.

2. On suppose que i est une immersion régulière de codimension d , que p est lisse de dimension relative n et que pi est une immersion régulière de codimension $d - n$. Alors, pour tout $\alpha \in A_k Z$,

$$(pi)^*(\alpha) = i^*(p^* \alpha)$$

dans $A_{k+n-d} X$.

13 Produits d'intersection

On cherche à généraliser la notion d'intersection déjà connue pour les équations algébriques (un polynôme de degré d possède exactement d racines comptées avec multiplicités)⁹.

Soit X une variété lisse, et soient Z, T deux sous-variétés de X de codimension p et q respectivement. On souhaite définir l'intersection de Z et T . Notons $W = Z \times_X T$ et considérons ses composantes irréductibles W_λ . En général, on a l'inégalité

$$\mathrm{codim}_X(W_\lambda) \leq p + q,$$

pour tout indice λ . Lorsque l'égalité a lieu, on dit que Z et T sont *transverses* (ou bien qu'elles s'intersectent proprement). Dans ce cas, on définit la *multiplicité d'intersection de la composante W_λ* par la formule (cf [25], Chapitre V, Section C, Paragraphe 1, Théorème 1) :

$$m_\lambda = \sum_{i=0}^{p+q} (-1)^i l_{\mathcal{O}_{X, W_\lambda}} \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_{X, W_\lambda}}(\mathcal{O}_{X, Z}, \mathcal{O}_{X, T}),$$

où $l_A(M)$ désigne toujours la longueur du A -module M .

13.1 Théorème. *Soit X une variété lisse. Il existe une unique structure d'anneau commutatif sur le groupe $A^*(X)$ telle que, si Z et T sont deux variétés transverses de X , alors le produit d'intersection de Z par T est*

$$[Z] \cdot [T] = \sum_\lambda m_\lambda [W_\lambda]$$

où W_λ et m_λ sont définis comme ci-dessus.

Pour démontrer ce théorème, on peut utiliser le *moving lemma* (cf Stack Project Tag 0B0D) qui affirme que l'on peut toujours supposer que Z et T s'intersectent proprement quitte à les remplacer par des cycles rationnellement équivalents.

Une autre façon de procéder est d'utiliser la déformation au cône normal pour définir le produit d'intersection (cf [4], Chapitre 5).

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme (plat) entre variétés lisses, alors le pullback

$$f^* : A_* Y \rightarrow A_* X$$

est un morphisme d'anneaux gradués.

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre avec Y lisse, alors f_* est un morphisme de $A_* Y$ -modules. Autrement dit, on a la *formule de projection* :

$$f_*(\alpha \cdot f^*(\beta)) = f_*(\alpha) \cdot \beta.$$

9. Plus généralement, le théorème de Bézout affirme que des courbes en position générale de degré d_1 et d_2 respectivement s'intersectent en exactement $d_1 d_2$ points.

Troisième partie

Catégories de motifs

14 Correspondances

Rappelons que les schémas sont toujours de type fini sur le corps de base K .

14.1. Les énoncés concernant les schémas projectifs¹⁰ ; on peut toujours se ramener au cas des variétés en considérant la décomposition

$$A(X \times Y) = \oplus_{ij} A(X_i \times Y_j),$$

où X_i, Y_j sont les composantes connexes¹¹ de X et Y respectivement. Une *correspondance* d'un schéma projectif X vers un schéma projectif Y est une classe d'équivalence de cycles sur $X \times Y$. On écrira $\alpha : X \vdash Y$ pour signifier que α est une correspondance de X à Y .

Si $\alpha : X \vdash Y, \beta : Y \vdash Z$ (où X, Y, Z sont de plus lisses), la *composée* de deux correspondances, noté $\beta \circ \alpha$, est la correspondance de X vers Z définie par

$$\beta \circ \alpha = p_{XZ*}(p_{XY}^* \alpha \cdot p_{YZ}^* \beta),$$

où p_{XY}, p_{YZ}, p_{XZ} sont les projections canoniques de $X \times Y \times Z$ vers $X \times Y, Y \times Z, X \times Z$ respectivement¹². Le produit $p_{XY}^* \alpha \cdot p_{YZ}^* \beta$ est l'intersection usuelle sur le schéma projectif lisse $X \times Y \times Z$. Cette composition définit une application bilinéaire

$$A(X \times Y) \otimes A(Y \times Z) \rightarrow A(X \times Z).$$

Toute correspondance $\alpha : X \vdash Y$ possède une transposée $\alpha^t : Y \vdash X$ définie par

$$\alpha^t = \tau_*(\alpha),$$

avec $\tau : X \times Y \rightarrow Y \times X, (x, y) \mapsto (y, x)$.

14.2 Proposition. Soit $\alpha : X \vdash Y, \beta : Y \vdash Z$.

1. Si $\gamma : Z \vdash W$, alors $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$.
2. $(\beta \circ \alpha)^t = \alpha^t \circ \beta^t$ et $(\alpha^t)^t = \alpha$.
3. (a) Si $\beta = \Gamma_g$ est le graphe d'un morphisme g , alors $\beta \circ \alpha = (\text{Id}_X \times g)_*(\alpha)$.

10. Dans cette section, le mot "projectif" peut être remplacé par "propre".

11. Remarque : si un schéma lisse est connexe, alors il est irréductible.

12. Sans plus de précisions, on utilisera parfois les notations p_{XY}, p_{YZ}, p_{XZ} ou bien $p_{XY}^{XYZ}, p_{YZ}^{XYZ}, p_{XZ}^{XYZ}$ pour désigner des applications canoniques similaires.

- (b) Si $\alpha = \Gamma_f$, alors $\beta \circ \alpha = (f \times \text{Id}_Z)^*(\beta)$.
 (c) Si $\alpha = \Gamma_f$ et $\beta = [\Gamma_g]$, alors $\beta \circ \alpha = \Gamma_{g \circ f}$.

Démonstration. Notons p_{XW}^{XZW} la projection canonique $X \times Z \times W \rightarrow X \times W$, de même pour les autres applications. Pour les projections canoniques de sources $X \times Y \times Z \times W$, les exposants sont omis. D'après la Proposition 8.2, on a l'égalité

$$(p_{XZ}^{XZW})^* \circ (p_{XZ}^{XYZ})_* = (p_{XZW})_* \circ (p_{XYZ})^* \quad (1)$$

entre morphismes de $A(X \times Y \times Z)$ vers $A(X \times Z \times W)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \gamma \circ (\beta \circ \alpha) &= p_{XW}^{XZW} (p_{XZ}^{XZW*} (p_{XZ}^{XYZ} (p_{XY}^{XYZ*} \alpha \cdot p_{YZ}^{XYZ*} \beta)) \cdot p_{ZW}^{XZW*} \gamma) \\ &= p_{XW}^{XZW} (p_{XZW}^* (p_{XYZ}^* (p_{XY}^{XYZ*} \alpha \cdot p_{YZ}^{XYZ*} \beta)) \cdot p_{ZW}^{XZW*} \gamma) \\ &= p_{XW}^{XZW} (p_{XZW}^* ((p_{XY}^* \alpha \cdot p_{YZ}^* \beta) \cdot p_{XZW}^* p_{ZW}^{XZW*} \gamma)) \\ &= p_{XW}^* ((p_{XY}^* \alpha \cdot p_{YZ}^* \beta) \cdot p_{ZW}^* \gamma) \\ &= p_{XW}^* (p_{XY}^* \alpha \cdot (p_{YZ}^* \beta \cdot p_{ZW}^* \gamma)). \end{aligned}$$

Les cinq égalités se justifient comme suit : (i) par définition de la composée ; (ii) d'après la formule (1) ; (iii) par compatibilité du pullback avec le produit d'intersection, par fonctorialité du pullback et d'après la formule de projection ; (iv) par fonctorialité du pushforward et pullback ; (v) par associativité du produit d'intersection. Par symétrie, le dernier terme est aussi $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha$, d'où le point (1).

Pour le point (2), on considère le morphisme $\sigma : X \times Y \times Z \rightarrow Z \times Y \times X$, $(x, y, z) \mapsto (z, y, x)$. Pour tous schémas S et T , on note τ^{ST} le morphisme $S \times T \rightarrow T \times S$, $(s, t) \mapsto (t, s)$. D'après la Proposition 8.2,

$$\begin{aligned} (p_{ZY}^{ZYX})^* \circ (\tau^{YZ})_* &= \sigma_* \circ (p_{YZ}^{XYZ})^*, \\ (p_{YX}^{ZYX})^* \circ (\tau^{XY})_* &= \sigma_* \circ p_{XY}^{XYZ*}. \end{aligned}$$

En raisonnant comme précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha^t \circ \beta^t &= p_{ZX}^{ZYX} (p_{ZY}^{ZYX*} (\tau^{YZ} \beta) \cdot p_{YX}^{ZYX*} (\tau^{XY} \alpha)) \\ &= p_{ZX}^{ZYX} ((\sigma_* p_{YZ}^{XYZ*} \beta) \cdot (\sigma_* p_{XY}^{XYZ*} \alpha)) \\ &= p_{ZX}^{ZYX} \sigma_* (p_{XY}^{XYZ*} \alpha \cdot p_{YZ}^{XYZ*} \beta) \\ &= \tau_*^{XY} p_{XZ}^{XYZ} (p_{XY}^{XYZ*} \alpha \cdot p_{YZ}^{XYZ*} \beta) \\ &= (\beta \circ \alpha)^t. \end{aligned}$$

La troisième égalité utilise le fait que σ_* est un morphisme d'anneaux (pour le produit d'intersection), ce que l'on admet ; la quatrième égalité découle de l'identité $p_{ZX}^{ZYX} \sigma = \tau^{XY} p_{XZ}^{XYZ}$. La seconde identité à démontrer est une conséquence de la formule $\tau^{YX} \tau^{XY} = \text{Id}_{X \times Y}$.

Les dernières assertions se démontrent de même (utiliser de nouveau la Proposition 8.2). $\square$

14.3 Corollaire. Soit X un schéma projectif lisse. Le produit $\alpha \times \beta \mapsto \alpha \circ \beta$ fait du groupe $A(X \times X)$ un anneau¹³ d'unité $[\Delta_X]$ (la classe de la diagonale de $X \times X$), et muni d'une involution $\alpha \mapsto \alpha^t$.

14.4. Soit $\alpha : X \dashrightarrow Y$ une correspondance, on définit le morphisme

$$\alpha_* : A(X) \rightarrow A(Y)$$

par la formule $\alpha_*(a) = p_{Y*}^{XY}(\alpha \cdot p_X^{XY*}(a))$, et un morphisme

$$\alpha^* : A(Y) \rightarrow A(X)$$

par la formule $\alpha^*(b) = p_{X*}^{XY}(\alpha \cdot p_Y^{XY*}(b))$.

14.5 Proposition. 1. Si $\alpha : X \dashrightarrow Y, \beta : Y \dashrightarrow Z$, alors

$$(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_* \text{ et } (\beta \circ \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*.$$

2. Si $\alpha : X \dashrightarrow Y$, alors $(\alpha^t)_* = \alpha^*$.

3. Si $f : X \rightarrow Y$, alors $(\Gamma_f)_* = f_*$ et $(\Gamma_f)^* = f^*$.

En particulier, le morphisme

$$A(X \times X) \rightarrow \text{End}(A(X)), \alpha \mapsto \alpha_* \text{ (resp. } \alpha \mapsto \alpha^*)$$

est un morphisme (resp. anti-morphisme) d'anneaux (le produit étant la composition).

Démonstration. Soit $P = \text{Spec } K$. Si $a \in A(X) = A(P \times X)$, alors $\alpha_*(a)$ peut être confondu avec $\alpha \circ a$ dans $A(Z) = A(P \times Z)$. De même, si $b \in A(Y) = A(Y \times P)$, alors $\alpha^*(b)$ peut être confondu avec $b \circ \alpha$. En utilisant ces identifications, les trois premières assertions découlent de la précédente Proposition 14.2. $\square$

15 Catégories de correspondances

Soit **Corr** la catégorie additive suivante. Les objets de **Corr** sont les schémas projectives lisses sur K . Le groupe $\text{Hom}_{\mathbf{Corr}}(X, Y) = \text{Corr}(X, Y)$ des morphismes entre deux objets X et Y est le groupe $A(X \times Y)$ des correspondances, la composition étant celle entre correspondances (14).

Soient X et Y deux schémas projectifs. Le groupe des correspondances de degré r est défini par

$$\text{Corr}_r(X, Y) = \oplus_i A_{d_i-r}(X_i \times Y) = \oplus_j A_j^{d'_j+r}(X \times Y_j),$$

où les X_i (resp. Y_j) sont les composantes connexes¹⁴ de X (resp. Y) de dimension notée d_i (resp. d'_j).

Si de plus X et Y sont lisses, et si Z est un troisième schéma projectif lisse, alors la composition entre correspondances induit un morphisme

13. Cet anneau est en général non commutatif.

14. En pratique, nos schémas seront souvent équidimensionnel de sorte que les correspondances de degré r sont simplement un décalage du groupe de Chow.

$$\mathrm{Corr}_r(X, Y) \otimes \mathrm{Corr}_s(Y, Z) \rightarrow \mathrm{Corr}_{r+s}(X, Z)$$

où r et s sont des entiers.

15.1 Définition. On définit $\mathbf{Corr}_0$ la sous-catégorie additive de $\mathbf{Corr}$ de la manière suivante. Les objets de $\mathbf{Corr}_0$ sont ceux de $\mathbf{Corr}$. Le groupe des morphismes entre deux objets X et Y est le groupe

$$\mathrm{Corr}_0(X, Y) \subset \mathrm{Corr}(X, Y)$$

des correspondances de degré 0, la composition étant celle induite.

Lorsque X est irréductible de dimension d , on remarque que

$$\mathrm{Corr}_0(X, X) = A_d(X \times X) = A^d(X \times X).$$

L'élément neutre Id_X de $\mathrm{Corr}_0(X, X)$ est la classe $[\Delta_X]$ de la diagonale de $X \times X$.

Si k est un entier, l'application $X \mapsto A_k(X)$ (resp. $X \mapsto A^k(X)$) définit un foncteur covariant (resp. contravariant) sur la catégorie $\mathbf{Corr}_0$. En effet, pour $f \in \mathrm{Corr}_0(X, Y)$, on a défini au Paragraphe 14.4 l'application $f_* : A_k(X) \rightarrow A_k(Y)$ (resp. $f^* : A^k(Y) \rightarrow A^k(X)$).

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de schémas (projectifs lisses au-dessus de K), on notera encore f son graphe :

$$f = [\Gamma_f] \in \mathrm{Corr}_0(X, Y).$$

Le point (3) de la Proposition 14.5 montre que les applications f_* et f^* sont les pushforwards et pullbacks usuels.

16 Motifs de Grothendieck

La catégorie $\mathbf{Corr}_0$ des correspondances de degré 0 est additive mais a priori non abélienne. C'est pour cela que l'on considère l'enveloppe pseudo-abélienne (ou karoubienne) de $\mathbf{Corr}_0$ que l'on note $\mathbf{Chow}^{\mathrm{eff}}$: elle vérifie la propriété (universelle¹⁵) que tout idempotent se scinde, autrement dit, que les projecteurs possèdent tous des noyaux. Concrètement, les objets de $\mathbf{Chow}^{\mathrm{eff}}$ (appelés *motifs effectifs*) sont les couples (X, p) avec X un objet de $\mathbf{Corr}_0$ (i.e. un schéma projectif lisse) et $p \in \mathrm{Corr}_0(X, X)$ est un idempotent/projecteur ($p \circ p = p$). Le groupe de morphismes entre deux objets est :

$$\mathrm{Hom}((X, p), (Y, q)) = q \circ \mathrm{Corr}_0(X, Y) \circ p \subset \mathrm{Corr}_0(X, Y).$$

15. Plus précisément, soit $\mathcal{D}$ une catégorie dans laquelle les projecteurs admettent tous des noyaux (on peut fixer le choix des noyaux à l'aide de l'axiome du choix), et soit $F : \mathbf{Corr}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Alors il existe un unique foncteur $\bar{F} : \mathbf{Chow}^{\mathrm{eff}} \rightarrow \mathcal{D}$ prolongeant F et préservant le choix des noyaux.

La composition des flèches est celle induite par Corr .

À tout schéma X de $\mathbf{Corr}_0$, on associe le couple (X, Id_X) (que l'on note encore X).

Si (X, p) est un objet de $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}$ et k un entier, on définit le groupe de Chow par :

$$\begin{aligned} A_k((X, p)) &= p_*(A_k(X)), \\ A^k((X, p)) &= p^*(A_k(X)). \end{aligned}$$

La catégorie $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}$ est monoïdale ; la somme et le produit sont données par :

$$\begin{aligned} (X, p) \oplus (Y, q) &= (X \sqcup Y, p + q) \\ (X, p) \otimes (Y, q) &= (X \times Y, p \times q). \end{aligned}$$

Le motif neutre pour la multiplication est $(\text{Spec}(K), \text{Id})$, que l'on note $\mathbb{Z}$.

Soit X un objet de $\mathbf{Corr}_0$ et soit p un projecteur sur X . Comme la catégorie est pseudo-abélienne, on a l'isomorphisme

$$(X, \text{Id}_X) = (X, p) \oplus (X, \text{Id}_X - p).$$

17 Le motif de Tate

On peut montrer (en utilisant la Proposition 9.1) que le groupe $\text{End}(\mathbb{P}^1) = A_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ engendré par les cycles $p_1 = [P \times \mathbb{P}^1]$ et $p_0 = [\mathbb{P}^1 \times P]$ (avec P un K -point quelconque de $\mathbb{P}^1$). Si Δ est la diagonale de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on a $[\Delta] = p_0 + p_1$. Ainsi, p_0 et p_1 sont deux projecteurs orthogonaux de $\text{End}(\mathbb{P}^1)$. On a $(\mathbb{P}^1, p_0) = \text{Spec}(K) = \mathbb{Z}$.

Le motif $\mathbb{Z}(1) = (\mathbb{P}^1, p_1)$ est appelé *motif de Tate*. Pour $i \geq 0$, on note¹⁶ $\mathbb{Z}(i)$ le produit $\mathbb{Z}(1) \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}(1)$ de i copies de $\mathbb{Z}(1)$ (où $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z} = \text{Spec}(K)$).

Si X est un motif, on note $X(i) = X \otimes \mathbb{Z}(i)$.

17.1. Soient $(X, p), (Y, q)$ deux motifs et i, j deux entiers, alors

$$\text{Hom}((X, p)(i), (Y, q)(j)) = q \text{Corr}_{j-i}(X, Y)p.$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathbb{Z}(k), X) &= A_k(X), \\ \text{Hom}(X, \mathbb{Z}(k)) &= A^k(X). \end{aligned}$$

Soit n un entier et soit X une variété projective lisse. En utilisant la suite exacte de localisation 9.1, on peut montrer l'isomorphisme d'anneaux gradués (la multiplication étant le produit d'intersection) :

$$A^*(X \times \mathbb{P}^n) = A^*(X)[h]/(h^{n+1}).$$

16. On note parfois ce motif $\mathbb{Z}(i)[2i]$ pour rappeler que $\mathbf{Chow}^{\text{eff}}$ est naturellement une sous-catégorie pleine de la catégorie triangulée $\mathbf{DM}^{\text{eff}}(K)$.

En particulier, en observant les termes de codimension n , on obtient l'isomorphisme de groupes :

$$A^n(X \times \mathbb{P}^n) = \oplus_{i=0, \dots, n} A^i(X).$$

En se souvenant du Paragraphe 17.1, on remarque que cet isomorphisme n'est rien d'autre que

$$\mathrm{Hom}(X, \mathbb{P}^n) = \oplus_{i=0, \dots, n} \mathrm{Hom}(X, \mathbb{Z}(i)) = \mathrm{Hom}(X, \oplus_{i=0, \dots, n} \mathbb{Z}(i)).$$

Le lemme de Yoneda fournit alors la décomposition du motif $(\mathbb{P}^n, \mathrm{Id})$:

$$\mathbb{P}^n = \oplus_{i=0, \dots, n} \mathbb{Z}(i).$$

18 Correspondances généralisées

18.1. Suivant Brosnan ([2], Section 2), on va généraliser la composition entre correspondances. Soient X, Y, Z des schémas, on suppose de plus que Y est projective lisse. On va utiliser le morphisme de Gysin induit par l'immersion régulière

$$\mathrm{Id} \times \Delta \times \mathrm{Id} : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y \times Y \times Z.$$

On considère le morphisme

$$\begin{aligned} A_r(X \times Y) \otimes \mathrm{Corr}_s(Y, Z) &\rightarrow A_{r-s}(X \times Z) \\ \beta \otimes \alpha &\mapsto \alpha \circ \beta \end{aligned}$$

où la composition est définie par la formule

$$\alpha \circ \beta = p_{XZ*}((\mathrm{Id} \times \Delta \times \mathrm{Id})^*(\beta \times \alpha)).$$

On va montrer que cette nouvelle composition généralise la précédente 14.1 et que celle-ci est compatible avec les pushforwards et pullbacks.

18.2 Proposition. *Soient X, X', Y, Z des schémas, on suppose Y projectif lisse.*

1. *Si X et Z sont lisses, alors l'intersection définie au Paragraphe 18.1 est la même que celle définie au Paragraphe 14.1.*
2. *Si $\pi : X' \rightarrow X$ un morphisme propre, alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A_r(X' \times Y) \otimes \mathrm{Corr}_s(Y, Z) & \longrightarrow & A_{r-s}(X' \times Z) \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ A_r(X \times Y) \otimes \mathrm{Corr}_s(Y, Z) & \longrightarrow & A_{r-s}(X \times Z) \end{array}$$

est commutatif. On a noté π_ le morphisme induit par le pushforward π_* sur le premier facteur et l'identité sur les autres facteurs.*

3. Si $\pi : X' \rightarrow X$ un morphisme plat de dimension relative e , alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_r(X \times Y) \otimes \text{Corr}_s(Y, Z) & \longrightarrow & A_{r-s}(X \times Z) \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow \pi^* \\ A_{r+e}(X' \times Y) \otimes \text{Corr}_s(Y, Z) & \longrightarrow & A_{r+e-s}(X' \times Z) \end{array}$$

est commutatif. On a noté π^* le morphisme induit par le pullback π^* sur le premier facteur et l'identité sur les autres facteurs.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que Y est irréductible. En effet, cela vient du fait que $\text{Corr}_s(Y, Z)$ et $A_r(X \times Y)$ se décomposent en une somme directe indexée par les composantes irréductibles de Y et que les morphismes considérés commutent aux sommes directes. Montrons le point 1. Une autre formulation de la formule du Paragraphe 14.1 est

$$\alpha \circ \beta = p_{XZ*} \Delta_{XYZ}^* (p_{XY}^* \times p_{YZ}^*) (\alpha \times \beta)$$

où $\Delta_{XYZ} : X \times Y \times Z \rightarrow (X \times Y \times Z) \times (X \times Y \times Z)$ est le morphisme diagonal. Considérons le morphisme

$$\Delta_Y : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y \times Y \times Z, (x, y, z) \mapsto (x, y, y, z)$$

de sorte que $\Delta_Y = (p_{XY} \times p_{YZ}) \circ \Delta_{XYZ}$ où

$$p_{XY} \times p_{YZ} : (X \times Y \times Z) \times (X \times Y \times Z) \rightarrow (X \times Y) \times (Y \times Z).$$

On peut appliquer la Proposition 12.2 pour obtenir

$$\Delta_Y^* (\beta \times \alpha) = \Delta_{XYZ}^* (p_{XY} \times p_{YZ})^* (\beta \times \alpha) = \Delta_{XYZ}^* (p_{XY}^* \beta \times p_{YZ}^* \alpha).$$

Le point 1 en résulte en prenant les pushforwards.

Démontrons le point 2. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' \times Y \times Z & \xrightarrow{\Delta'_Y} & X' \times Y \times Y \times Z \\ \pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z \downarrow & & \downarrow \pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z \\ X \times Y \times Z & \xrightarrow{\Delta_Y} & X \times Y \times Y \times Z \end{array}$$

est cartésien, avec Δ_Y, Δ'_Y induits par la diagonale $Y \rightarrow Y \times Y$. Comme Δ_Y est une immersion régulière de codimension $\dim(Y)$ et que $\pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z$ est propre et transverse à Δ_Y , on peut appliquer le point (1) du Théorème 12.1 de sorte que les pushforwards propres et les pullbacks de Gysin commutent :

$$\begin{aligned} \pi_*(\alpha \circ \beta) &= (\pi \times \text{Id}_Z)_* p_{XZ*} \Delta_Y^* (\beta \times \alpha) \\ &= p_{XZ*} (\pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z)_* \Delta_Y^* (\beta \times \alpha) \\ &= p_{XZ*} \Delta_Y^* (\pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z)_* (\beta \times \alpha) \\ &= p_{XZ*} \Delta_Y^* ((\pi \times \text{Id})_* (\beta \times \alpha)) \\ &= \alpha \circ (\pi_* \beta). \end{aligned}$$

La démonstration du point 3 se montre de même. On considère le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' \times Y \times Z & \xrightarrow{\pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z} & X \times Y \times Z \\ p'_{XZ} \downarrow & & \downarrow p_{XZ} \\ X' \times Z & \xrightarrow{\pi \times \text{Id}_Z} & X \times Z. \end{array}$$

Puisque les flèches verticales sont propres et les flèches horizontales sont plates, on a d'après la Proposition 8.2 que

$$p'_{XZ*}(\pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z)^* = (\pi \times \text{Id}_Z)^* p_{XZ*}.$$

On considère ensuite le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' \times Y \times Z & \xrightarrow{\Delta'_Y} & X' \times Y \times Y \times Z \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \times Y \times Z & \xrightarrow{\Delta_Y} & X \times Y \times Y \times Z \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont plates et les flèches horizontales sont des immersions régulières. Le point (2) du Théorème 12.1 permet de faire commuter les flèches :

$$\begin{aligned} \pi^*(\alpha \circ \beta) &= (\pi \times \text{Id}_Z)^* p_{XZ*} \Delta_Y^*(\beta \times \alpha) \\ &= p'_{XZ*}(\pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z)^* \Delta_Y^*(\beta \times \alpha) \\ &= p_{XZ*} \Delta_Y'^*(\pi \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Y \times \text{Id}_Z)^*(\beta \times \alpha) \\ &= p_{XZ*} \Delta_Y'^*(\pi^* \beta \times \alpha) \\ &= \alpha \circ (\pi^* \beta). \end{aligned}$$

□

18.3 Remarque. On a un résultat dual similaire en échangeant les rôles de X et Z .

18.4 Proposition. Soient X, Y, Z, W quatre schémas, on suppose Y et Z propres et lisses.

1. Si $\Delta \in \text{Corr}_0(Y, Y)$ désigne la classe de la diagonale, alors le morphisme $A_r(X \times Y) \rightarrow A_r(X \times Y), \alpha \mapsto \Delta \circ \alpha$ est l'identité.
2. Si $\alpha \in A_r(X \times Y)$, si $\beta \in \text{Corr}_r(Y, Z)$ et $\gamma \in \text{Corr}_r(Z, W)$, alors

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha).$$

Démonstration. La première assertion se vérifie directement en revenant aux définitions. Pour la seconde, on utilise le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} X \times Y \times Z \times W & \xrightarrow{\quad} & X \times Y \times Y \times Z \times W \\ \downarrow & \searrow \Delta_{YZ} & \downarrow \\ X \times Y \times Z \times Z \times W & \xrightarrow{\quad} & X \times Y \times Y \times Z \times Z \times W. \end{array}$$

On trouve $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = p_{XW*} \Delta_{YZ}^*(\gamma \times \beta \times \alpha) = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$. $\square$

18.5. On peut alors généraliser la définition du groupe des correspondances. Soit $M = (Y, q)$ un motif de **Chow**^{eff} et soit X un schéma quelconque, on pose

$$\text{Corr}_0(X, M) = q \circ \text{Corr}_0(X, Y).$$

Si $j : U \rightarrow X$ est une immersion ouverte (plate), on a un morphisme induit $\text{Corr}_0(X, M) \rightarrow \text{Corr}_0(U, M)$. Si $p : X' \rightarrow X$ est propre, on a un morphisme induit $\text{Corr}_0(X', M) \rightarrow \text{Corr}_0(X, M)$. De même, on peut définir $\text{Corr}_0(M, X)$.

Tout ceci sera utilisé dans la démonstration du prochain théorème.

Quatrième partie

Construction du motif de Rost

On fixe toujours K un corps de base (qui est ici supposé de caractéristique différente de 2).

19 Décomposition motivique d'une quadrique isotropique

19.1 Théorème. *Soit $X = V(\varphi)$ une quadrique projective associée à une forme quadrique non dégénérée φ . Supposons que X possède un point rationnel sur K ; autrement dit $\varphi = \psi \perp \mathbb{H}$, où ψ est une forme quadratique. Notons Y la quadrique projective lisse associée à la forme ψ . Alors dans la catégorie **Chow**^{eff}, il existe une décomposition*

$$X = \mathbb{Z} \oplus Y(1) \oplus \mathbb{Z}(d) \text{ où } d = \dim X.$$

Démonstration. Dans une base idoine, on peut (par définition de $\mathbb{H}$) écrire $\varphi(x, y, z) = xy + \psi(z)$ où $z = (z_1, \dots, z_d)$. Soit Z la sous-variété fermée $V(x) \cap X$ et soit P le point fermé de Z correspondant au fermé d'équations $x = z = 0, y = 1$. Notons $U = X \setminus Z$, cet ouvert est isomorphe à $\mathbb{A}^d$. De plus $Z \setminus \{P\}$ est un fibré en droites sur Y via le morphisme $(y, z) \mapsto z$. Pour tout motif M , on a ainsi les suites exactes (cf Proposition 9.1)

$$\text{Corr}_0(M, Z) \rightarrow \text{Corr}_0(M, X) \rightarrow \text{Corr}_0(M, \mathbb{A}^d) \rightarrow 0, \quad (2)$$

$$\text{Corr}_0(M, \{P\}) \rightarrow \text{Corr}_0(M, Z) \rightarrow \text{Corr}_0(M, Y(1)) \rightarrow 0. \quad (3)$$

Ceci est bien défini malgré le fait que Z soit en général une quadrique singulière. D'après le Théorème 18.4, chaque terme de ces deux suites peut être vu comme un préfaisceau en M sur la catégorie des motifs de Chow donné, par

exemple, par $M \mapsto \text{Corr}_0(M, Z)$. De plus, d'après la Proposition 18.2, les morphismes dans (2) et (3) sont fonctoriels en M , i.e. induisent des transformations naturelles entre les préfaisceaux. Montrons que les deux suites exactes sont scindées. Pour cela, on explicite une rétraction.

Concernant le point (3), soit $p : Z \rightarrow \{P\}$ la projection canonique. Alors $p_* : \text{Corr}_0(M, Z) \rightarrow \text{Corr}_0(M, \{P\})$ est une rétraction (l'application est bien fonctorielle en M).

Concernant (2), on admet le résultat (l'argument proposé dans [2] semblant incomplet). On propose au lecteur de procéder comme suit. En utilisant le début de la démonstration originale de Rost ([22], Proposition 2), on peut construire une correspondance de X vers $Y(1)$. La suite exacte (3) donnant la décomposition du motif $Z = Y(1) \oplus \mathbb{Z}$, on peut alors construire une application $X \vdash Z$ qui devrait donner la section recherchée.

Pour finir, en utilisant la Proposition 10.1 et l'identité du Paragraphe 17.1, on obtient l'isomorphisme de groupes

$$\text{Corr}_0(M, \mathbb{A}^d) = \text{Hom}(M, \mathbb{Z}(d)).$$

On en déduit alors la décomposition

$$\text{Hom}(M, Q) = \text{Hom}(M, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(M, Y(1)) \oplus \text{Hom}(M, \mathbb{Z}(d)).$$

Par fonctorialité en M , le lemme de Yoneda fournit la décomposition recherchée. $\square$

20 Anneau de Chow d'une quadrique scindée

Soit φ une forme quadratique non dégénérée à $d + 2$ variables ($d \geq 0$). On note X le schéma projectif associé à φ . On cherche à décrire l'anneau de Chow $A(X)$ dans le cas où φ est scindée afin de mieux comprendre l'anneau $\text{End}(X)$ (la composition étant celle entre correspondances).

20.1. On peut toujours supposer φ non identiquement nulle de sorte que $\dim X = d$. Si $d = 0$, on voit que $A_0(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ si X est constitué de deux points rationnels et $A_0(X) = \mathbb{Z}$ sinon.

20.2. Dans la suite, on supposera $d > 0$. Dans ce cas, on montre (cf [26], Théorème 1) que $A_0(X) = \mathbb{Z}$ (l'isomorphisme peut être décrit par l'application degré du Paragraphe 6).

De plus, on supposera désormais que φ est scindée.

20.3 Proposition. *La quadrique scindée X se décompose en somme de puissances du motif de Tate :*

$$X = \begin{cases} \oplus_{i=0}^d \mathbb{Z}(i) & \text{si } d \text{ est impair,} \\ \oplus_{i=0}^d \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(d/2) & \text{si } d \text{ est pair,} \end{cases}$$

où $d = \dim X$.

Démonstration. Cela découle par récurrence du Théorème 19.1. $\square$

20.4 Corollaire. *La quadrique scindée X vérifie*

$$\text{End}(X) = \oplus_p \text{End}_{\mathbb{Z}}(A_p(X)).$$

Démonstration. Cela découle de la proposition précédente et de l'identité du Paragraphe 17.1 $\square$

20.5. Dans une base adaptée, la forme φ est donnée par

$$\varphi = \begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i y_i + z^2 & \text{si } d+2 = 2m+1, \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i & \text{si } d+2 = 2m. \end{cases}$$

Notons $h \in A^1(X)$ la classe d'une section hyperplane $\{x_1 = 0\}$ de X (c'est-à-dire, le pullback de l'hyperplan via une immersion de X dans l'espace projectif). Pour $i \geq 0$, la puissance h^i (pour le produit d'intersection) est un élément de $A^i(X)$. En particulier, $h^i = 0$ si $i > n$ et $h^i = [X] = 1$ si $i = 0$.

20.6 Proposition. *Le groupe de Chow $A(X)$ de la quadrique scindée X est décrit de la manière suivante :*

1. Si $i < d/2$, alors le groupe $A^i(X) = \mathbb{Z}$ est engendré par h^i .
2. Si $d+2 = 2m$, alors le groupe $A^{d/2}(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est (librement) engendré par $l_d^{(0)}$ et $l_d^{(1)}$, où $l_d^{(0)}$ et $l_d^{(1)}$ sont les classes correspondant respectivement aux équations

$$\begin{aligned} \{x_1 = \cdots = x_{m-1} = x_m = 0\}, \\ \{x_1 = \cdots = x_{m-1} = y_m = 0\}. \end{aligned}$$

3. Si $i > d/2$, alors le groupe $A^i(X) = \mathbb{Z}$ est engendré par $h^i/2$, où $h^i/2$ est la classe d'un sous-espace isotropique de codimension i (l'élément h^i est bien divisible par 2). En particulier, l'élément $h^d/2$ est la classe d'un point rationnel.

Démonstration. Le cas $d = 0$ fut mentionné ci-dessus au Paragraphe 20.1. Concernant le cas $d = 1$, on peut alors écrire $\varphi = xy + z^2$. On peut montrer que la quadrique X est isomorphe à la droite projective $\mathbb{P}^1$ plongée dans $\mathbb{P}^2$ via le plongement de Véronèse $(x, y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$. Il est possible de montrer que le degré de h est 2 (Théorème de Bézout). Le Paragraphe 20.2 rappelant l'isomorphisme $A^1(X) = \mathbb{Z}$ donné par l'application degré, on voit que le point h est divisible par 2. On peut alors conclure dans ce cas.

Le restant de la preuve se fait par récurrence en utilisant (cf la preuve de 19.1 et ses notations) le fait que l'isomorphisme induit par la décomposition du Théorème 19.1

$$A_i(Y) \rightarrow A_{i-1}(X)$$

(où $i = 1, \dots, n-1$) respecte les sous-espaces linéaires. $\square$

La proposition suivante (qui découle en partie de la proposition précédente) décrit la structure multiplicative de $A(X)$. On note $u = h^{(d+1)/2}/2$.

20.7 Proposition. *L'anneau de Chow $A(X)$ de la quadrique scindée X est donné par la présentation suivante :*

$$\begin{array}{ll} \langle h, u \mid h^{(d+1)/2} = 2u, h^{d+1} = 0, u^2 = 0 \rangle & \text{si } d \equiv 1 \pmod{2} \\ \langle h, l_d^{(0)}, l_d^{(1)} \mid h^{d/2} = l_d^{(0)} + l_d^{(1)}, hl_d^{(0)} = hl_d^{(1)}, l_d^{(0)}l_d^{(1)} = 0, (l_d^{(0)})^2 = (l_d^{(1)})^2 = h^d, h^{d+1} = 0 \rangle & \text{si } d \equiv 0 \pmod{4} \\ \langle h, l_d^{(0)}, l_d^{(1)} \mid h^{d/2} = l_d^{(0)} + l_d^{(1)}, hl_d^{(0)} = hl_d^{(1)}, l_d^{(0)}l_d^{(1)} = h^d, (l_d^{(0)})^2 = (l_d^{(1)})^2 = 0, h^{d+1} = 0 \rangle & \text{si } d \equiv 2 \pmod{4} \end{array}$$

20.8. On cherche maintenant à décrire l'anneau $\text{End}(X) = A^d(X \times X)$ (la multiplication étant ici la composition des correspondances). On supposera désormais que d est pair¹⁷. On note N_d l'ensemble $\{0, \dots, d\} \setminus \{d/2\}$. En raisonnant comme ci-dessus, on montre la proposition suivante.

20.9 Proposition. *L'homomorphisme d'anneaux*

$$A(X) \otimes A(X) \rightarrow A(X \times X), \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \times \beta$$

est un isomorphisme. En particulier, si d est pair, alors $A^d(X \times X)$ est le groupe abélien libre engendré par $h^i/2 \times h^{n-i}/2$ (où $i \in N_d$), $l^{(\varepsilon)} \times l^{(\varepsilon')}$ (où $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}$).

La structure multiplicative est donnée par les relations suivantes.

1. Pour $0 \leq i, j, k, l \leq n$, on a

$$(h^i/2 \times h^j/2) \circ (h^k/2 \times h^l/2) = \begin{cases} h^k/2 \times h^j/2 & \text{si } d = i + l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour tout $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}$ et tout $i \in N_d$, les correspondances $l^{(\varepsilon)} \times l^{(\varepsilon')}$ et $h^i/2 \times h^{d-i}/2$ sont orthogonales.

3. Pour tout $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$, on a

$$(l^{(\varepsilon'_1)} \times l^{(\varepsilon_2)}) \circ (l^{(\varepsilon_0)} \times l^{(\varepsilon_1)}) = \begin{cases} l^{(\varepsilon_0)} \times l^{(\varepsilon_2)} & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon'_1 \text{ et } n/2 \text{ est pair, ou} \\ & \text{si } \varepsilon_1 \neq \varepsilon'_1 \text{ et } n/2 \text{ est impair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. En revenant aux définitions, on se ramène au calcul d'un produit d'intersection. Par exemple, si $i + l = d$ et si

$$\begin{aligned} p_{13} : X \times X \times X &\rightarrow X \times X, \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, x_3) \end{aligned}$$

désigne la projection canonique évidente, alors

$$\begin{aligned} (h^i/2 \times h^j/2) \circ (h^k/2 \times h^l/2) &= p_{13*}((1 \times h^i/2 \times h^j/2) \cdot (h^k/2 \times h^l/2 \times 1)) \\ &= p_{13*}(h^k/2 \times h^{i+l}/2 \times h^j/2) = \deg(h^{i+l}/2)(h^k/2 \times h^j/2) = h^k/2 \times h^j/2. \end{aligned}$$

¹⁷. Lorsque d est impair, on obtient les mêmes résultats à ceci près qu'il n'y a plus le terme du milieu $A^{d/2}(X)$ (donc moins de problèmes).

□

20.10 Corollaire. *La classe de la diagonale dans $A^d(X \times X)$ est égale à*

$$\sum_{i \in N_d} h^i/2 \times h^{d-i}/2 + \begin{cases} l_d^{(0)} \times l_d^{(0)} + l_d^{(1)} \times l_d^{(1)} & \text{si } n/2 \text{ est pair,} \\ l_d^{(0)} \times l_d^{(1)} + l_d^{(1)} \times l_d^{(0)} & \text{si } n/2 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. Si l'on considère un générateur du groupe $A^d(X \times X) = \text{End}(X)$ et qu'on le compose (à gauche ou à droite) par la somme ci-dessus, on obtient alors le même générateur (les calculs se faisant à l'aide de la proposition précédente). Autrement dit, la somme agit comme l'identité (qui est la classe de la diagonale). □

21 Théorème de nilpotence de Rost

Soient X et Y des variétés projectives lisses et $f \in \text{Corr}_0(X, Y)$ une correspondance. On rappelle qu'on a défini un morphisme $f_* : A_r(X) \rightarrow A_r(Y)$ que l'on peut voir comme induit par la composition $\mathbb{Z}(r) \rightarrow X \rightarrow Y$. De même, pour une variété projective lisse B , on obtient un morphisme $f_* : \text{Hom}(B, X) \rightarrow \text{Hom}(B, Y)$ donné par $g \mapsto f \circ g$ où $g \in \text{Hom}(B, X) = \text{Corr}_0(B, X)$. Le théorème de nilpotence de Rost sera une conséquence du théorème suivant.

21.1 Théorème. *Soient B et X des K -variétés projectives lisses avec $\dim B = d$. Pour tout $b \in B$, soit X_b la fibre de la projection $\pi : B \times X \rightarrow B$. Si $f \in \text{End}(X)$ est un morphisme tel que $f_* A_r(X_b) = 0$ pour tout $b \in B$ et tout $0 \leq r \leq d$, alors*

$$f_*^{d+1} \text{Hom}(B, X) = 0.$$

Démonstration. Soit $Z_k(B \times X)$ le groupe des cycles de dimension k sur $B \times X$, soit $F_p Z_k(B \times X)$ le sous-groupe de $Z_k(B \times X)$ engendré par les sous-variétés V de dimension k telles que $\dim \pi(V) \leq p$. Soit $F_p A_k(B \times X)$ l'image de $F_p Z_k(B \times X)$ modulo équivalence rationnelle. Pour montrer le théorème, il suffit de prouver que

$$f_* F_p A_d(B \times X) \subset F_{p-1} A_d(B \times X)$$

puisque $F_{-1} A_d(B \times X) = 0$. Ainsi il suffit de montrer que, si V est une sous-variété de $B \times X$ de dimension d et telle que $\dim \pi(V) \leq p$, alors $f_*[V] \in F_{p-1} A_d(B \times X)$.

Soit $Y = \pi(V)$. Montrons qu'il existe un ouvert non vide $U \subset Y$ tel que $f_*[V_U] = 0$ (où $V_U = V \times_Y U$). Soit b un point générique d'une composante irréductible de Y (notons-la Y_1). Pour tout $0 \leq r \leq d$, l'application f_* s'annule sur le groupe

$$A_r(V_b) = A_r(V \times_Y \text{Spec } \kappa(b)) = A_r(V \otimes_Y R(Y_1)) = \varinjlim_{\emptyset \neq U \subset Y_1} A_r(V \times_Y U).$$

D'où l'existence de l'ouvert U recherché (quitte à le réduire, on peut bien supposer que c'est un ouvert de Y).

Soit $W = Y \setminus U$ (muni de sa structure de sous-schéma réduit), considérons la suite exacte courte

$$A_d(W \times X) \xrightarrow{i_*} A_d(Y \times X) \xrightarrow{j^*} A_d(U \times X) \longrightarrow 0.$$

D'après les résultats concernant les correspondances généralisées, on a $f_*[V_U] = j^* f_*[V]$ où $f_*[V]$ est la composition $f \circ [V]$ de f avec $[V]$ vus comme éléments de $\text{Corr}_{p-d}(Y \times X)$. On obtient bien que $f_*[V]$ est dans l'image du morphisme i_* donc dans $F_{p-1} A_d(B \times X)$. $\square$

21.2 Théorème. (*Théorème de nilpotence de Rost*) Pour $d \in \mathbb{N}$, il existe un entier $N(d)$ tel que, si X est une quadrique lisse de dimension d sur K et $f \in \text{End}(X)$ vérifie $f_{\bar{K}} = 0$, alors $f^{N(d)} = 0$.

Démonstration. On pose $N(-1) = 1$ si $\dim(X) = 1$. Si $d = 0$, alors X est constitué ou bien de deux points définis sur K , ou bien d'un point défini sur une extension quadratique de K . Dans le premier cas, on a $\text{End}(X) = \text{End}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$. Dans le second cas, $\text{End}(X)$ est isomorphe au sous-anneau de rang 2 de $\text{End}(X \otimes \bar{K})$ constitué des matrices invariantes par conjugaison avec la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le résultat est donc trivialement vrai en prenant $N(0) = 1$.

On raisonne par récurrence sur d . Supposons que X soit de rang $d > 0$ avec un point sur K . Alors X se scinde selon la décomposition de Rost. On obtient

$$\text{End}(X) = \text{End}(\mathbb{Z}) \oplus \text{End}(Y) \oplus \text{End}(\mathbb{Z}(d)).$$

Cela découle du fait que les six termes croisés (e.g. $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(d)) = A^d(\text{Spec } K) = 0$) sont nuls pour des raisons de dimension. Comme $\text{End}(\mathbb{Z}(j)) = \mathbb{Z}$ pour tout j , on a

$$\text{End}(X) = \mathbb{Z} \oplus \text{End}(Y) \oplus \mathbb{Z}$$

et $f^{N(d-2)} = 0$ par hypothèse de récurrence appliquée à Y .

Si X ne possède pas de point sur K , alors $X \otimes \kappa(x)$ possède un point rationnel au-dessus du corps résiduel d'un point x . Ainsi, par hypothèse de récurrence $f^{N(d-2)} \otimes \kappa(x) = 0$ si x est un tel point. On applique maintenant le théorème précédent à $f^{N(d-2)}$ afin d'avoir $f^{(d+1)N(d-2)} = 0$. Il suffit alors de poser $N(d) = (d+1)N(d-2)$ pour conclure. $\square$

21.3 Corollaire. Soit L/K une extension de corps et soit X une quadrique sur K . Soit $p' \in \text{End}(X)$ une application telle que $(p')_L \in \text{End } X_L$ soit un projecteur. Alors il existe un projecteur $p \in \text{End}(X)$ tel que $p_L = (p')_L$.

Démonstration. Soit A (resp. B) le sous-anneau (commutatif) de $\text{End } X$ (resp. $\text{End } X_L$) engendré par p' (resp. $(p')_L$). D'après le Théorème 21.2, le noyau du morphisme canonique $A \rightarrow B$ est constitué d'éléments nilpotents. On peut alors affirmer qu'il existe un idempotent $p \in A$ tel que $p_L = (p')_L$ d'après ([1], Chap.II. p.132 §4, Cor.1 de la Prop.15)¹⁸. $\square$

21.4 Corollaire. Soient X, Y deux quadriques projectives lisses et soient p, q deux projecteurs sur X, Y respectivement. Si deux morphismes

$$\begin{aligned} f &\in \text{Hom}((X, p), (Y, q)) \text{ et} \\ g &\in \text{Hom}((Y, q), (X, p)) \end{aligned}$$

sont tels que, pour une extension de corps L/K donnée, le morphisme g_L (obtenu après extension des scalaires) est un inverse à gauche de f_L , alors f admet un inverse à gauche (différent de g en général). En particulier, si f_L et g_L sont deux morphismes mutuellement réciproques, alors f et g sont des isomorphismes.

Démonstration. On travaille dans l'anneau $\text{End}((X, p))$ dont l'élément neutre est p . On pose $\alpha = p - g \circ f$. Le théorème de nilpotence montre que α est nilpotent, ainsi $g \circ f$ admet pour inverse $\sum_{i \geq 0} \alpha^i$. $\square$

22 Construction du motif de Rost

Soit X une quadrique projective lisse de dimension $d \geq 1$ sur un corps K (de caractéristique $\neq 2$). On note $\bar{X} = X_{\bar{K}}$ la quadrique X après extension des scalaires. On note $l_0 = h^d/2$ la classe d'un point rationnel dans le groupe de Chow $A^d(\bar{X})$ des cycles de dimension 0 (voir la Proposition 20.6). On note 1 la classe de X dans $A^d(X)$.

22.1 Définition. Un cycle $\rho \in A_d(X \times X)$ est appelé *projecteur de Rost* si ρ est idempotent et si, après extension des scalaires à $\bar{K}$, on a

$$\rho_{\bar{K}} = l_0 \times 1 + 1 \times l_0$$

dans $A_d(\bar{X} \times \bar{X})$.

Le motif (X, ρ) déterminé par ρ est appelé *motif de Rost*.

22.2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments non nuls de K . Notons $\pi_n = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ la forme de Pfister associée aux $a_1, \dots, a_n$. Notons π'_n la forme quadratique vérifiant $\pi_n = \langle 1 \rangle \perp \pi'_n$ et considérons la forme $\varphi_n = \pi_{n-1} \perp \langle -a_n \rangle$. On remarque que

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \langle 1, -a_n \rangle \perp \pi'_{n-1} \text{ et} \\ \pi_n &= \varphi_n \perp (-a_n)\pi'_{n-1} \end{aligned}$$

18. On peut se passer de cet argument en montrant qu'il existe une extension galoisienne K'/K de degré 2^s telle que $0 = \text{cores}_{K'/K} \circ \text{res}_{K'/K}(x) = [K' : K] \cdot x$, où $x = p^2 - p$.

Dans toute la suite, on note $\pi = \pi_n$ (resp. $\varphi = \varphi_n$, $\psi = (-a_n)\pi'_{n-1}$) et P (resp. X , Z) sa quadrique projective lisse associée. On a $\dim X = 2^{n-1} - 1$, $\dim Z = 2^{n-1} - 3$ et $\dim P = 2^n - 2$. On écrira $d = \dim X$.

On cherche à construire le motif de Rost correspondant à la quadrique X . On a déjà étudié le cas isotropique ; on supposera la forme π_n anisotrope.

22.3 Lemme. *Le cycle $l_d \times 1 + 1 \times l_d \in A^d(\bar{P} \times \bar{P})$ est défini au-dessus de K , où $l_d \in A^d(\bar{P})$ est la classe d'un sous-espace linéaire de dimension d de $\bar{P}$.*

Démonstration. D'après la Proposition 20.9, on sait que $A^*(\bar{P} \times \bar{P}) = A^*(\bar{P}) \otimes A^*(\bar{P})$ et que le groupe $A^d(\bar{P} \times \bar{P})$ peut être vu comme un groupe abélien libre engendré par $h^i \times h^{d-i}$ ($i = 0, \dots, d$), $l_d \times 1$ et $1 \times l_d$. On note que les générateurs $h^i \times h^{d-i}$ sont définis au-dessus de K .

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^d(\bar{P} \times \bar{P}) & \xrightarrow{(\text{Id}_{\bar{P}} \times \bar{f})^*} & A^d(\bar{P}_{\bar{K}(\bar{P})}) \\ \text{res}_{\bar{K}/K} \uparrow & & \uparrow \text{res}_{\bar{K}(\bar{P})/K(P)} \\ A^d(P \times P) & \xrightarrow{(\text{Id}_P \times f)^*} & A^d(P_{K(P)}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les pullbacks par les morphismes plats $\text{Id}_P \times f : P_{K(P)} \rightarrow P \times P$ et $\text{Id}_{\bar{P}} \times \bar{f} : \bar{P}_{\bar{K}(\bar{P})} \rightarrow \bar{P} \times \bar{P}$, où f est le morphisme du point générique de P , et où les flèches verticales sont les limites inductives des pushforwards par rapport aux extensions finies de K et $K(P)$ respectivement.

Comme la forme de Pfister π est isotrope sur $K(P)$, elle est scindée sur $K(P)$. Ainsi, le générateur $l_d \in A^d(\bar{P}_{\bar{K}(\bar{P})})$ est défini au-dessus de $K(P)$. Comme $(\text{Id}_P \times f)^*$ est surjective, il existe un cycle $\alpha \in A^d(\bar{P} \times \bar{P})$ défini au-dessus de K tel que $(\text{Id}_{\bar{P}} \times \bar{f})^*(\alpha) = l_d$.

Il est possible de calculer comment le morphisme $(\text{Id}_{\bar{P}} \times \bar{f})^*$ agit sur les générateurs du groupe $A^d(\bar{P} \times \bar{P})$:

$$(\text{Id}_{\bar{P}} \times \bar{f})^*(h^i \times h^{d-i}) = 0 \text{ si } i = 0, \dots, d-1,$$

$$(\text{Id}_{\bar{P}} \times \bar{f})^*(h^d \times 1) = h^d, \text{ et}$$

$$(\text{Id}_{\bar{P}} \times \bar{f})^*(\pi \times 1) = l_d.$$

Comme $(\text{Id}_{\bar{P}} \times \bar{f})^*(\alpha) = l_d$, on a

$$\alpha = l_d \times 1 + a \cdot (1 \times l_d) + \sum_{i=0}^d a_i \cdot h^i \times h^{d-i},$$

où a et les a_i sont des entiers. Comme les cycles $h^i \times h^{d-i}$ et $2(1 \times l_d)$ sont définis au-dessus de K (car $2l_d = h^d$), on voit que ou bien $l_d \times 1 + 1 \times l_d$ ou $l_d \times 1$ est défini au-dessus de K . Dans le premier cas, c'est gagné. Dans le second cas, en sommant avec la transposée on obtient que $l_d \times 1 + 1 \times l_d$ est défini au-dessus de K (en fait, ce second cas n'est jamais possible puisque π est anisotropique). $\square$

22.4 Théorème. *La quadrique X possède un projecteur de Rost.*

Démonstration. On considère de nouveau P la quadrique de Pfister de dimension $2d$ contenant X . Le lemme précédent montre que le cycle $l_d \times 1 + 1 \times l_d \in A^d(\bar{P} \times \bar{P})$ est défini au-dessus de K . En prenant son pullback dans $A^d(\bar{X} \times \bar{X})$ suivant l'immersion $\bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \bar{P} \times \bar{P}$ (qui est défini au-dessus de K), on obtient le cycle $l_0 \times 1 + 1 \times l_0$. Cela fournit un projecteur de Rost en utilisant le Corollaire 21.3. $\square$

22.5 Théorème. *Soit ρ un projecteur de Rost sur X , le motif $(X, \text{Id}_X - \rho)$ est isomorphe au motif $Z(1)$, où Z est défini au Paragraphe 22.2.*

Démonstration. Au-dessus de $\bar{K}$, l'isomorphisme et sa réciproque sont donnés par le cycle (cf la Proposition 20.9 et son Corollaire) $\alpha \in A^{d-1}(\bar{X} \times \bar{Z}) \circ (\text{Id}_X - \rho) = \text{Hom}((X, \text{Id}_X - \rho), Z(1))$ tel que

$$\alpha = (h \times h^{d-2} + h^2 \times h^{d-3} + \dots + h^{d-2} \times h + h^{d-1} \times 1)/2$$

et sa transposée. D'après le Corollaire 21.4, il suffit de montrer que le cycle α est défini au-dessus de K .

Supposons que X possède un point rationnel. Alors la forme de Pfister π est scindée et donc $\varphi \simeq \psi \perp \mathbb{H}$. En utilisant la décomposition motivique $X = \mathbb{Z} \oplus Z(1) \oplus \mathbb{Z}(d)$, on obtient un isomorphisme $A^{d-1}(X \times Z) \simeq A^{d-2}(Z \times Z)$. Le cycle recherché sur $X \times Z$ est le cycle correspondant à la diagonale de $Z \times Z$ via cet isomorphisme.

Dans le cas général, on peut obtenir le cycle recherché en étendant les scalaires au corps des fonctions $R(X)$. On prend ensuite une image réciproque de ce cycle via l'épimorphisme

$$A^{d-1}(X \times X \times Z) \rightarrow A^{d-1}((X \times Z)_{K(X)}).$$

On obtient alors un cycle sur $X \times X \times Z$ qui, au-dessus de $\bar{K}$, ressemble à

$$1 \times \alpha + \sum_i \beta_i \times \gamma_i, \tag{4}$$

où β_i sont des cycles homogènes sur $\bar{X}$ et γ_i sont des cycles sur $\bar{X} \times \bar{Z}$ tels que $\text{codim } \beta_i > 0$ et $\dim \beta_i > 0$ (ce dernier fait provient de ce que $\beta_i \times \gamma_i \in A^{d-1}(\bar{X} \times \bar{X} \times \bar{Z})$ et $\dim \bar{X} = d$). Considérons le cycle (4) en tant que correspondance dans $\text{Corr}(X, X \times Z)$ et composons-le avec $\rho \in \text{Corr}(X, X)$.

On obtient un cycle défini au-dessus de K qui est égal à $1 \times \alpha$ au-dessus de $\bar{K}$ (puisque au-dessus de $\bar{K}$ on a $(\beta_i \times \gamma_i) \circ (l_0 \times 1) = 0$ car $\text{codim } \beta_i > 0$, et puisque $(\beta_i \times \gamma_i) \circ (1 \times l_0) = 0$ car $\dim \beta_i > 0$). En prenant le pullback suivant la diagonale de X

$$A^{d-1}(X \times X \times Z) \rightarrow A^{d-1}(X \times Z),$$

on a bien le cycle recherché puisque $1 \times \alpha$ s'envoie sur α au-dessus de $\bar{K}$. $\square$

23 Unicité du motif de Rost

On conclut en démontrant l'unicité du projecteur de Rost. On conserve les notations précédentes. On commence par décrire le cas isotropique.

23.1 Lemme. *Supposons que la quadrique X soit isotropique. Alors la correspondance $l_0 \times 1 + 1 \times l_0$ est l'unique projecteur de Rost sur X .*

Démonstration. La décomposition motivique (voir Théorème 19.1) donne l'existence d'une quadrique X' vérifiant

$$\text{End}(X) = \mathbb{Z} \oplus \text{End}(X') \oplus \mathbb{Z}.$$

Ainsi, un projecteur de Rost sur X est de la forme $\rho = (l_0 \times 1 + 1 \times l_0) + \alpha$ où $\alpha_{\bar{K}} = 0$. On a nécessairement $\alpha \in \text{End}(X')$. D'après le théorème de nilpotence de Rost, il existe un entier N tel que $\alpha^N = 0$. Comme

$$\alpha \circ (l_0 \times 1 + 1 \times l_0) = 0 = (l_0 \times 1 + 1 \times l_0) \circ \alpha,$$

le projecteur ρ vaut $\rho = \rho^N = l_0 \times 1 + 1 \times l_0 + \alpha^N = l_0 \times 1 + 1 \times l_0$, d'où le résultat. $\square$

23.2 Corollaire. *Supposons que la quadrique X (de dimension d) soit isotropique. Soit ρ un projecteur de Rost sur X . Alors, pour tout $1 \leq i \leq d-1$, le morphisme $\rho_* : A_i(X) \rightarrow A_i(X)$ est nul.*

Démonstration. Soit x dans $A_i(X)$. Si $i < d$, alors $(l_0 \times 1) \cdot (x \times 1) = 0 \in A_*(X \times X)$ car $l_0 \cdot x_0$ pour des raisons de dimensions. Si $i > 0$ et si $p_2 : X \times X \rightarrow X$ désigne la projection sur le second facteur, alors $(p_{2*}((1 \times l_0) \cdot (x \times 1))) = (p_{2*}(x \times l_0)) = 0$. D'où le résultat. $\square$

On vient d'étudier le cas où la quadrique est isotropique ; traitons le cas général.

23.3 Lemme. *L'action de ρ sur le groupe $A^{d-1}(X \times Z)$ est nulle.*

Démonstration. On a vu dans le corollaire précédent que le résultat est vrai après extension des scalaires (puisque notre quadrique devient alors isotropique). Le théorème de nilpotence implique que l'action du projecteur ρ est nilpotente donc nulle. $\square$

23.4 Théorème. *Si ρ et ρ' sont deux projecteurs de Rost sur X , alors $\rho = \rho'$.*

Démonstration. Il suffit de montrer $\rho = \rho' \circ \rho$ et $\rho = \rho \circ \rho'$ (et d'échanger les rôles de ρ et ρ'). On montre seulement la première égalité (la seconde se démontrant de la même manière). On considère pour cela la différence $\rho - \rho' \circ \rho = (\text{Id}_X - \rho') \circ \rho$ qui peut être vue comme une correspondance $(X, \rho) \rightarrow (X, \text{Id}_X - \rho')$. Pour conclure, il suffit de montrer le groupe $\text{Hom}((X, \rho), (X, \text{Id}_X - \rho'))$ est nul. Utilisant le Théorème 22.5, on remplace $(X, \text{Id}_X - \rho')$ par $Z(1)$. Par définition,

$$\text{Hom}((X, \rho), (X, \text{Id}_X - \rho')) = A^{d-1}(X \times Z) \circ \rho = \rho^t \circ A^{d-1}(Z \times X),$$

la dernière égalité étant obtenue en transposant. Comme la transposée ρ^t est encore un projecteur de Rost, le lemme précédent conclut. $\square$

Références

- [1] BOURBAKI, NICOLAS. *Commutative algebra*. Chapters 1–7. Translated from the French. Reprint of the 1989 English translation. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. xxiv+625 pp. ISBN : 3-540-64239-0
- [2] BROSAN, PATRICK. *A short proof of Rost nilpotence via refined correspondences*. Doc. Math. 8 (2003), 69–78.
- [3] CHERNOUSOV, VLADIMIR ; GILLE, STEFAN ; MERKURJEV, ALEXANDER. *Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties*. Duke Math. J. 126 (2005), no. 1, 137–159.
- [4] FULTON, WILLIAM. *Intersection theory*. Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 2. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xiv+470 pp. ISBN : 3-540-62046-X ; 0-387-98549-2
- [5] GROTHENDIECK, A. ; DIEUDONNÉ, J. A.. *Éléments de géométrie algébrique. I. (French) [[Elements of algebraic geometry. I]]* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 166. Springer-Verlag, Berlin, 1971. ix+466 pp.
- [6] GROTHENDIECK, A. *Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 8 1961 222 pp.
- [7] GROTHENDIECK, A. *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. (French)* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 32 1967 361 pp.

- [8] HARTSHORNE, ROBIN. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp. ISBN : 0-387-90244-9
- [9] IZHBOLDIN, OLEG T. *Motivic equivalence of quadratic forms*. Doc. Math. 3 (1998), 341–351.
- [10] IZHBOLDIN, OLEG T. ; KARPENKO, NIKITA A.. *Some new examples in the theory of quadratic forms*. Math. Z. 234 (2000), no. 4, 647–695.
- [11] KAHN, BRUNO. *Formes quadratiques et cycles algébriques (d'après Rost, Voevodsky, Vishik, Karpenko et al.)*. (French) [[Quadratic forms and algebraic cycles (after Rost, Voevodsky, Vishik, Karpenko et al.)]] Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005. Astérisque No. 307 (2006), Exp. No. 941, vii, 113–163. ISBN : 978-2-85629-224-2
- [12] KAHN, BRUNO. *La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky)* [MR1627119]. (French) [[Milnor's conjecture (after V. Voevodsky)]] Handbook of K -theory. Vol. 1, 2, 1105–1149, Springer, Berlin, 2005.
- [13] KARPENKO, N. A. *Algebro-geometric invariants of quadratic forms*. (Russian); translated from Algebra i Analiz 2 (1990), no. 1, 141–162 Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 1, 119–138
- [14] KARPENKO, N. A. *A Direct Construction of the Rost Motive*. 1998.
- [15] KARPENKO, NIKITA A. *Characterization of minimal Pfister neighbors via Rost projectors*. J. Pure Appl. Algebra 160 (2001), no. 2-3, 195–227.
- [16] KARPENKO, NIKITA A. *Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras*. Math. Ann. 317 (2000), no. 3, 585–611.
- [17] KARPENKO, NIKITA A. *Motives and Chow groups of quadrics with application to the u -invariant (after Oleg Izhboldin)*. Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms, 103–129, Lecture Notes in Math., 1835, Springer, Berlin, 2004.
- [18] LAM, T. Y. *Introduction to quadratic forms over fields*. Graduate Studies in Mathematics, 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. xxii+550 pp. ISBN : 0-8218-1095-2
- [19] MILNOR, JOHN. *Algebraic K -theory and quadratic forms*. Invent. Math. 9 1969/1970 318–344.
- [20] ROST, MARKUS. *Some new results on the Chowgroups of quadrics*, 1990.
- [21] ROST, MARKUS. *Chow groups with coefficients*. Doc. Math. 1 (1996), No. 16, 319–393.
- [22] ROST, MARKUS. *The Motive of a Pfister Form*, 1998.
- [23] ROST, MARKUS. *On The Cassel-Pfister Theorem*, 2002.

- [24] SCHARLAU, WINFRIED. *Quadratic and Hermitian forms*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 270. Springer-Verlag, Berlin, 1985. x+421 pp. ISBN : 3-540-13724-6
- [25] SERRE, JEAN-PIERRE. *Algèbre locale. Multiplicités*. (French) Cours au Collège de France, 1957–1958, rédigé par Pierre Gabriel. Seconde édition, 1965. Lecture Notes in Mathematics, 11 Springer-Verlag, Berlin-New York 1965 vii+188 pp. (not consecutively paged).
- [26] SWAN, RICHARD G. *Zero cycles on quadric hypersurfaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), no. 1, 43–46.
- [27] VISHIK, ALEXANDER. *Integral motives of quadrics*. Thesis (Ph.D.)–Harvard University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1997. 150 pp. ISBN : 978-0591-42947-3
- [28] VISHIK, ALEXANDER. *Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms*. Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms, 25–101, Lecture Notes in Math., 1835, Springer, Berlin, 2004.
- [29] VOEVODSKY, VLADIMIR. *Bloch-Kato conjecture for $\mathbb{Z}/2$ -coefficients and algebraic Morava K -theories*, 1995.
- [30] VOEVODSKY, VLADIMIR. *Triangulated categories of motives over a field*. Cycles, transfers, and motivic homology theories, 188–238, Ann. of Math. Stud., 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.
- [31] VOEVODSKY, VLADIMIR. *The Milnor Conjecture*, 1996.
- [32] VOEVODSKY, VLADIMIR. *Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$ -coefficients*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 98 (2003), 59–104.