Entre logique et topoï : le topos effectif

Niels FELD

Juillet 2016

Table des matières

1 Catégories **2**

2 Fonctions récursives **8**

3 Réalisabilité **9**

4 Le topos effectif **12**

5 Remarques finales **21**

Introduction

À l'origine, les topoï furent étudiés afin de mieux comprendre ce qu'on appelle topos de Grothendieck (souvent noté $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$) qui sont des catégories de préfaisceaux "continus" supposées généraliser la notion d'espace topologique. La théorie des topoï a depuis pris beaucoup d'envergure et s'est retrouvée connectée avec de nombreux domaines mathématiques, notamment en logique. Dans leur définition de topos (élémentaire), W. Lawvere et M. Tierney mirent en avant le classificateur de sous-objets qui joue le rôle de table de vérité contenant le vrai, le faux, et parfois plus. De nos jours, la logique (du premier ordre ou d'ordre supérieur) est bien décrite à l'aide de la théorie des topoï (de Grothendieck ou élémentaires).

Ce papier se devant être à la fois accessible mais concis, on introduira brièvement la théorie des catégories et celle des topoï dans la première partie. La plupart des preuves seront omises. Les références pour cette section sont [2], [9], [7], [6] pour la théorie des catégories et [5], [10], [3] pour celle des topoï.

Dans la seconde partie, on commencera par donner quelques rappels concernant les fonctions récursives (on pourra consulter [12] et [8]). Ensuite, on présentera un exemple particulier de topos qui a trait à la logique constructive (ou intuitionniste) : le topos effectif **Eff**. On montrera, avec de nombreux détails, que c'est un topos. Enfin, on terminera en présentant quelques propriétés remarquables. Les références principales pour cette section sont [13] et [4]. On pourra aussi consulter [11].

1 Catégories

Afin de fixer les idées, la suite sera pensée (mais non lourdement formalisée) dans la théorie $\mathbf{ZFC} + \mathbf{U}$ de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix plus l'axiome [1] **U** stipulant que pour tout ensemble x, il existe un univers $\mathcal{U}$ possédant x (i.e. $x \in \mathcal{U}$). On précise qu'un univers est un ensemble non vide $\mathcal{U}$ vérifiant les cinq conditions suivantes :

1. si $x \in \mathcal{U}$ et $y \in x$, alors $y \in \mathcal{U}$;
2. si $x, y \in \mathcal{U}$, alors $\{x, y\} \in \mathcal{U}$;
3. si $x \in \mathcal{U}$, alors $\mathcal{P}(x) \in \mathcal{U}$;
4. si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}$, et si $I \in \mathcal{U}$, alors la réunion $\cup_{\alpha \in I} x_\alpha$ appartient à $\mathcal{U}$.
5. l'ensemble $\mathbb{N} = \{\varnothing, \varnothing \cup \{\varnothing\}, \ldots\}$ des entiers naturels (de Von Neumann) appartient à $\mathcal{U}$.

Un univers peut-être vu, de manière informelle, comme "l'ensemble" de tous les ensembles.
Dans toute la suite, on fixe une fois pour toute un univers $\mathcal{U}$. On dira qu'un ensemble est petit [2] s'il appartient à $\mathcal{U}$.

1.1 Définition. Une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en :

1. un ensemble $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
2. pour tous éléments X, Y de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, un ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
3. pour tous éléments X, Y, Z de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, une application
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$
appelée composition et notée par $(f, g) \mapsto g \circ f$,

ces données vérifiant :

1. Attention : les conventions ici sont légèrement différentes de celles de SGA4 [1].
2. Voir la note précédente.

1. La composition est associative, c'est-à-dire que pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, on a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$,
2. pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, il existe un élément Id_X (appelé identité) de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ tel que $f \circ \mathrm{Id}_X = f$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $\mathrm{Id}_X \circ g = g$ pour tout $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$.

Les éléments de $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ sont appelés objets de $\mathcal{C}$. Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$, un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ est noté $f : X \to Y$ et appelé morphisme de X vers Y ; on appelle domaine de f l'ensemble $\mathrm{dom}(f) = X$ et codomaine de f l'ensemble $\mathrm{cod}(f) = Y$. Deux morphismes f et g tels que $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g)$ sont dits compatibles (et alors $g \circ f$ existe).

1.2 Remarque.
1. On note **Ens** la catégorie dont les objets sont les petits ensembles et dont les morphismes sont les applications entre ces ensembles.
2. Un ensemble (partiellement) pré-ordonné $(X, \leq)$ peut être vu comme une catégorie en considérant pour objet les éléments de X et en imposant un morphisme $x \to y$ entre deux éléments $x, y \in X$ si, et seulement si, $x \leq y$.
3. A toute catégorie $\mathcal{C}$, on a associe la catégorie opposée $\mathcal{C}^\circ$ avec posant $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^\circ) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, et en définissant la nouvelle composition par $g \circ' f = f \circ g$ (où X, Y, Z sont des objets de $\mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$). On notera X° et f° les éléments de $\mathcal{C}$ considérés dans la catégorie opposée.
4. Un morphisme $f : X \to Y$ est un monomorphisme si, pour toute paire de morphismes $g_1, g_2 : Z \to X$, l'identité $f \circ g_1 = f \circ g_2$ implique $g_1 = g_2$.
5. Un morphisme $f : X \to Y$ est un épimorphisme si $f^\circ : Y^\circ \to X^\circ$ est un monomorphisme dans $\mathcal{C}^\circ$.
6. Deux objets X et Y d'une catégorie sont dits isomorphes s'il existe deux morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Les morphismes f et g sont appelés isomorphismes.

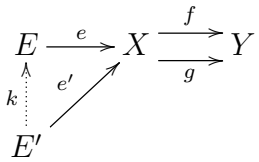
1.3 Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet $\mathbf{1}$ dans $\mathcal{C}$ est dit final si, pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe une unique application $!_X : X \to \mathbf{1}$.
Si la catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet final, il est unique à isomorphisme près.

Démonstration. Les preuves d'unicité concernant les objets définis comme solution d'un problème universel se ressemblent toutes. Montrons que, s'il existe, l'objet final $\mathbf{1}$ est unique à isomorphisme près. Soit $\mathbf{1}'$ un autre objet

final. Il existe deux morphismes $! : \mathbf{1} \to \mathbf{1}'$ et $!' : \mathbf{1}' \to \mathbf{1}$. Par unicité, le morphisme composé $!' \circ !$ est $\mathrm{Id}_{\mathbf{1}}$. De même, $! \circ !' = \mathrm{Id}_{\mathbf{1}'}$. Ceci montre que $\mathbf{1}$ et $\mathbf{1}'$ sont isomorphes. □

1.4 Exemple. Dans la catégorie des ensembles **Ens**, l'entier $1 = \{\varnothing\}$ est un objet final.

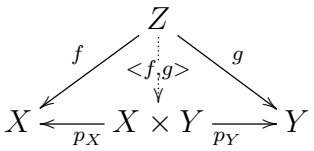
1.5 Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un égaliseur de deux morphismes donnés $f, g : X \to Y$ est un morphisme $e : E \to X$ tel que $f \circ e = g \circ e$ et, pour tout morphisme $e' : E' \to X$ vérifiant $f \circ e' = g \circ e'$, il existe un unique morphisme $k : E' \to E$ tel que $e' = e \circ k$.



S'il existe, l'égaliseur est unique (à isomorphisme près).
On dit qu'une catégorie possède des égaliseurs si tout couple de morphismes $f, g : X \to Y$ possède un égaliseur.

1.6 Exemple. La catégorie des ensembles **Ens** possède des égaliseurs. En effet, si $f, g : X \to Y$ sont deux applications entre petits ensembles, alors l'injection canonique de l'ensemble $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ dans X est un égaliseur.

1.7 Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Le produit (binaire) de deux objets X et Y est un objet $X \times Y$ muni de deux morphismes $p_X : X \times Y \to X, p_Y : X \times Y \to Y$ (appelés projections) tel que, pour tout objet Z et tous morphismes $f : Z \to X, g : Z \to Y$, il existe un unique morphisme $< f, g >: Z \to X \times Y$ vérifiant $p_X \circ < f, g > = p_Y \circ < f, g >$.
S'il existe, le produit de deux objets est unique (à isomorphisme près).
On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ a des produits binaires si toute paire d'objets de $\mathcal{C}$ possède un produit (binaire).



1.8 Exemple. 1. Dans la catégorie **Ens**, le produit binaire de deux (petits) ensembles est donné par le produit cartésien usuel.

2. Dans un ensemble (partiellement) ordonné $(X, \leq)$ vu comme catégorie, deux éléments x et y possèdent un produit $x \wedge y$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont réalisées :

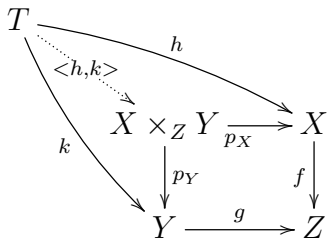
   $x \wedge y \leq x$,

   $x \wedge y \leq y$, et

   si $z \leq x$ et $r \leq y$, alors $r \leq x \wedge y$.

1.9 Remarque. On peut définir de même la notion de produit fini. En pratique, il suffit d'avoir un élément final **1** et des produits binaires pour avoir tous les produits finis.

1.10 Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Le pullback (ou produit fibré) de deux morphismes $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ est un objet $X \times_Z Y$ muni de deux morphismes $p_X : X \times_Z Y \to X, p_Y : X \times_Z Y \to Y$ (appelés projections) vérifiant $f \circ p_X = g \circ p_Y$ et tel que, pour tous morphismes $h : T \to X, k : T \to Y$ vérifiant $f \circ h = g \circ k$, il existe un unique morphisme $<h, k> : T \to X \times_Z Y$ vérifiant $p_X \circ <h, k> = p_Y \circ <h, k>$.
Lorsqu'il existe, le pullback est unique (à isomorphisme près).



1.11 Exemple. En conservant les notations ci-dessus et en supposant que $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, on peut regarder $X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(x)\}$.

1.12 Définition. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un couple d'applications assignant à tout objet C de $\mathcal{C}$ un objet $F(C)$ de $\mathcal{D}$ et à tout morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ un morphisme $F(f) : F(X) \to F(Y)$ de sorte que les compositions et les identités soient respectées, i.e.

1. si f et g sont deux morphismes compatibles de $\mathcal{C}$, alors
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)\,;$$
2. pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$.

1.13 Exemple.
1. Un foncteur entre deux ensembles (partiellement) préordonnés n'est rien d'autre qu'une application croissante.
2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie telle que, pour tous objets X et Y, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est petit (on dit que $\mathcal{C}$ est localement petite). Si A est un objet de $\mathcal{C}$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Ens}$ définie par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)(f) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A), h \mapsto h \circ f,$$

pour tout morphisme $f : X \to Y$, est un foncteur.

1.14 Définition. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, et soient $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $R : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ deux foncteurs. Le foncteur L est dit adjoint à gauche de R et R est dit adjoint à droite de L si, pour tous objets X de $\mathcal{C}$ et Y de $\mathcal{D}$, il existe une bijection

$$\sigma_{XY} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y)),$$

naturelle dans le sens où, pour tous morphismes $f : X' \to X$ de $\mathcal{C}$ et $g : Y \to Y'$ de $\mathcal{D}$, si h est dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(X), Y)$, alors :

$$\sigma_{X'Y'}(g \circ h \circ L(f)) = R(g) \circ \sigma_{XY}(h) \circ f.$$

Autrement dit, le diagramme [3] suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(X), Y) & \xrightarrow{\sigma_{XY}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, R(Y)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(g, L(f))} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(R(g), f)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(X'), Y') & \xrightarrow[\sigma_{X'Y'}]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', R(Y')) \end{array} .$$

1.15 Exemple.

1. Une algèbre de Heyting $\mathcal{H}$ est un treillis, avec un élément maximal $\top$ et un élément minimal $\bot$, tel que pour tout élément b de $\mathcal{H}$, le foncteur

   $$- \wedge b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, a \mapsto a \wedge b,$$

   possède un adjoint, que l'on note

   $$b \Rightarrow - : \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}, c \mapsto b \Rightarrow c.$$

   L'adjonction se traduit par la relation

   $$a \wedge b \leq c \text{ si, et seulement si, } a \leq b \Rightarrow c$$

   pour tous éléments a, b, c.
2. Une pré-algèbre de Heyting est un ensemble (partiellement) pré-ordonné tel que son ensemble ordonné canoniquement associé soit une algèbre de Heyting.

3. Sans plus de précisions, on emprunte à l'algèbre linéaire le vocabulaire concernant les diagrammes.

1.16 Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un objet X de $\mathcal{C}$ est appelé exponentiable si le foncteur $Y \mapsto X \times Y$ admet un foncteur adjoint à droite noté $Z \mapsto Z^X$.
On dit que la catégorie $\mathcal{C}$ possède des exponentielles lorsque tout objet de $\mathcal{C}$ est exponentiable.

1.17 Exemple. En conservant les notations ci-dessus et en supposant que $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$, l'exponentielle Z^X est l'ensemble des applications de l'ensemble X dans Z.

1.18 Définition. Une catégorie est dite cartésienne fermée si elle possède des exponentielles et des produits finis.

1.19 Définition. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant un objet final $\mathbf{1}$. Un *classificateur de sous-objets* est un (mono)morphisme $\top : \mathbf{1} \to \Omega$ tel que, pour tout monomorphisme [4] $S \rightarrowtail X$ dans $\mathcal{C}$, il existe un unique morphisme χ_S tel que le diagramme suivant soit un pullback.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{!_S} & \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \top} \\ X & \xrightarrow{\chi_S} & \Omega \end{array}$$

Autrement dit, tout sous-objet S est, de manière unique, le pullback d'un monomorphisme "universel" $\top$.
S'il existe, le classificateur de sous-objets est unique (à isomorphisme près).

1.20 Exemple. Dans la catégorie **Ens**, on considère les ensembles $1 = \{0\}$ et $\Omega = 2 = \{0, 1\}$, et l'injection $\top : 1 \to 2$ qui à 0 associe 1. Si S et X sont deux ensembles tels que $S \subset X$, on note $\chi_S : X \to 2$ la fonction caractéristique qui à $x \in S$ associe 0 si $x \notin S$ et 1 si $x \in S$. On peut voir que $\top : 1 \to \Omega$ est un classificateur de sous-objets.

1.21 Définition. Un topos (élémentaire [5]) est une catégorie cartésienne fermée possédant des égaliseurs et un classificateur de sous-objets. Autrement dit, un topos est une catégorie possédant :

1. Un object final,
2. des produits binaires,
3. des égaliseurs,

4. En suivant l'exemple donné par **Ens**, on dit parfois qu'un monomorphisme est un sous-objet de son codomaine.
5. Par opposition aux topoï dits de Grothendieck.

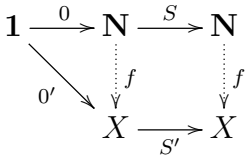
4. des exponentielles et
5. un classificateur de sous-objets.

1.22 Remarque. *Les propriétés $1, 2$ et 3 de la définition signifient que la catégorie possède des limites finies. $*$

1.23 Exemple.
1. La catégorie **Ens** est un topos.
2. On note $\mathbf{Ens}_f$ la catégorie ayant pour objets les ensembles finis et pour morphismes les applications entre ces ensembles. Cette catégorie est un topos élémentaire avec l'entier 1 pour objet final et l'entier 2 pour classificateur de sous-objets. *On remarque que cette catégorie ne possède pas de produits infinis. $*$
3. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie (localement petite), alors la catégorie des préfaisceaux $\mathbf{Ens}^{\mathcal{C}^\circ}$ est un topos. Plus généralement, un topos de Grothendieck $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ est un topos élémentaire. $*$

Certains auteurs demandent qu'un topos possède un objet des entiers naturel (cf [8]).

1.24 Définition (Lawvere)**.** Soit $\mathcal{C}$ une catégorie possédant un objet final $\mathbf{1}$. Un objet des entiers naturels dans $\mathcal{C}$ est un objet $\mathbf{N}$ muni de deux morphismes $0 : \mathbf{1} \to \mathbf{N}, S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ de $\mathcal{C}$ tel que, pour tout objet X et tout couple de morphismes $0' : \mathbf{1} \to X, S' : \mathbf{N} \to X$, il existe un unique morphisme $f : \mathbf{N} \to X$ faisant commuter le diagramme suivant.



Le morphisme $0 : \mathbf{1} \to \mathbf{N}$ est appelé application zéro et le morphisme $S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est appelé application successeur.
Lorsqu'il existe, l'objet des entiers naturels est unique (à isomorphisme près).

2 Fonctions récursives

2.1 Définition. L'ensemble des fonctions récursives partielles est le sous-ensemble $\mathfrak{R}$ de $\cup_{k\in\mathbb{N}}[\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}]$ (où, pour des ensembles A et B, on note $[A \to B]$ l'ensemble des applications partielles de A dans B) défini récursivement par :

1. L'application zero : $\mathbb{N}^0 \to \mathbb{N} : \varnothing \mapsto 0$ est dans $\mathfrak{R}$.
2. L'application succ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto n + 1$ est dans $\mathfrak{R}$.

3. Pour tout entiers n et i non nuls tels que $1 \leq i \leq n$, les projections $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ sont dans $\mathfrak{R}$.
4. Si $g \in [\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}]$ et $h_i \in [\mathbb{N}^m \to \mathbb{N}]$ (où $1 \leq i \leq n$) sont dans $\mathfrak{R}$, alors la fonction partielle $f \in [\mathbb{N}^m \to \mathbb{N}]$ définie par
$$f(\mathbf{x}) = g(h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_n(\mathbf{x}))$$
est dans $\mathfrak{R}$.
5. Si $g \in [\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}]$ et $h \in [\mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}]$ sont dans $\mathfrak{R}$, alors la fonction partielle $f \in [\mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}]$ définie par
$$f(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \text{ et } f(\mathbf{x}, n+1) = h(\mathbf{x}, n, f(\mathbf{x}, n))$$
est dans $\mathfrak{R}$.
6. Si $f \in [\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}]$ est dans $\mathfrak{R}$, alors la fonction $\mu(f) \in [\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}]$ définie par $\mu(f)(\mathbf{x}) = n$ si $f(\mathbf{x}, n) = 0$ et $\forall m < n, f(\mathbf{x}, m) > 0$ (et non définie sinon) est dans $\mathfrak{R}$.

En pratique, on se servira peu de la définition. Seule la proposition suivante (admise) sera importante.

2.2 Proposition. *Il existe une fonction récursive $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que, pour toute fonction récursive F d'arité 1, il existe un entier f (appelé indice de Kleene de F) tel que, pour tout entier n, $F(n) = \varphi(f, n)$ (quand cela est défini).*

Il existe une fonction récursive bijective $<\cdot, \cdot> : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

On note $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les fonctions récursives telles que
$$n = <\pi_1(n), \pi_2(n)> \text{ pour tout entier } n.$$

Si e et n sont deux entiers naturels, on note $e \cdot n \downarrow$ si la fonction récursive $\varphi(e, \cdot)$ associée à e est définie au point n. Si tel est le cas, on note $e \cdot n$ sa valeur.

3 Réalisabilité

Le topos effectif fut introduit pour la première fois par Hyland dans [4] comme cas particulier de topos de réalisabilité. La réalisabilité de Kleene y apparaît naturellement.

3.1 Définition. On note Σ l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (ensemble des parties de $\mathbb{N}$) muni des opérations $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$ définies par :

$A \wedge B = \{<n, m> \mid n \in A \text{ et } m \in B\}$,

$A \vee B = \{<0, m> \mid m \in A\} \cup \{<1, n> \mid n \in B\}$, et
$A \Rightarrow B = \{e \mid \text{si } n \in A, \text{ alors } e \cdot n \downarrow \text{ et } e \cdot n \in B\}$,
où A et B sont dans Σ.
De plus, on note parfois $\top = \mathbb{N}$ (vrai) et $\bot = \varnothing$ (faux).

3.2 Définition. (prédicats non standards) Soit X un ensemble. Sur l'ensemble Σ^X des applications de X dans Σ (aussi appelées prédicats non standards), on définit les opérations $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\top$ et $\bot$ point par point :

$$(\varphi \wedge \psi)(x) = \{<m, n> \mid m \in \varphi(x) \text{ et } n \in \psi(x)\} = \varphi(x) \wedge \psi(x),$$
$$(\varphi \vee \psi)(x) = \{<0, m> \mid m \in \varphi(x)\} \cup \{<1, n> \mid n \in \psi(x)\} = \varphi(x) \vee \psi(x),$$
$$(\varphi \Rightarrow \psi)(x) = \{e \mid \text{si } n \in \varphi(x), \text{ alors } e \cdot n \downarrow \text{ et } e \cdot n \in \psi(x)\} = \varphi(x) \Rightarrow \psi(x),$$
$$\top(x) = \top, \text{ et}$$
$$\bot(x) = \bot,$$

où φ et ψ sont dans Σ^X et x dans X.
On définit un ordre partiel $\vdash_X$ sur Σ^X par

$$\varphi \vdash_X \psi \text{ si, et seulement si, } \cap_{x \in X} (\varphi \Rightarrow \psi)(x) \text{ est non vide.}$$

Un élément de $\cap_{x \in X}(\varphi \Rightarrow \psi)(x)$ peut être vu comme (l'indice d')une fonction récursive qui associe à un élément de $\varphi(x)$ un élément de $\psi(x)$ et ceci pour tout x dans X. On dit qu'une telle fonction réalise $\varphi \vdash_X \psi$.
Un prédicat non standard $\varphi \in \Sigma^X$ est dit valide si $\top \vdash_X \varphi$. En pratique, on dira abusivement que φ est valide voire que $\varphi(x)$ est valide. On remarque que si $\psi \in \Sigma^X$, on a que $\varphi \vdash_X \psi$ est valide si, et seulement si, $\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$ l'est.

3.3 Lemme. *L'ensemble pré-ordonné $(\Sigma^X, \vdash_X)$ est une pré-algèbre de Heyting.*

Démonstration. La relation $\vdash_X$ est un pré-ordre sur Σ^X. En effet, la fonction (récursive) identité réalise $\varphi \vdash_X \varphi$ pour tout φ dans Σ^X. De plus, si f et g réalisent respectivement $\varphi \vdash_X \psi$ et $\psi \vdash_X \chi$, alors leur composition $g \circ f$ réalise $\varphi \vdash_X \chi$. Le maximum pour $\vdash_X$ est $\top$ puisque $\cap_{x \in X}(\varphi \Rightarrow \top)(x) = \mathbb{N}$ (i.e toute fonction récursive réalise $\varphi \vdash_X \top$). De même, le minimum est l'élément $\bot$.
Le minimum de deux éléments $\varphi, \psi \in \Sigma^X$ est $\varphi \wedge \psi$. En effet, $(\varphi \wedge \psi) \vdash_X \varphi$ est réalisé par la projection π_1 sur la première composante , et $(\varphi \wedge \psi) \vdash_X \psi$ est réalisé par la projection π_2 sur la seconde composante. De plus, soit χ dans Σ^X ; si f et g réalisent respectivement $\chi \vdash_X \varphi$ et $\chi \vdash_X \psi$, alors

$$<f, g> : n \mapsto <f(n), g(n)>$$

réalise $\chi \vdash_X (\varphi \wedge \psi)$, d'où le résultat.
Le maximum de φ et ψ est l'élément $\varphi \vee \psi$. En effet, $\varphi \vdash_X (\varphi \vee \psi)$ est réalisé par la fonction récursive $n \mapsto <0, n>$, et $\psi \vdash_X (\varphi \vee \psi)$ est réalisé par la fonction récursive $n \mapsto <1, n>$. De plus, soit χ dans Σ^X ; si f et g réalisent respectivement $\varphi \vdash_X \chi$ et $\psi \vdash_X \chi$, alors la fonction récursive h définie, pour n entier, par $h(<0, n>) = f(n)$ et $h(<1, n>) = g(n)$ réalise $(\varphi \vee \psi) \vdash_X \chi$, d'où le résultat.
Enfin, pour $\varphi, \psi, \chi \in \Sigma^X$, montrons que $(\chi \wedge \varphi) \vdash_X \psi$ si, et seulement si, $\chi \vdash_X (\varphi \Rightarrow \psi)$. Supposons que $(\chi \wedge \varphi) \vdash_X \psi$ est réalisé par f. On définit [6] la fonction récursive g qui à un entier (naturel) n associe l'indice de Kleene de la fonction récursive $f(<n, \cdot>)$. Soit alors x dans X et n dans $\chi(x)$, l'entier $g(n)$ est dans $(\varphi \Rightarrow \psi)(x)$ (i.e la fonction récursive $g(n)$ envoie tout élément de $\varphi(x)$ sur un élément de $\psi(x)$). Ainsi, la fonction g réalise $\chi \vdash_X (\varphi \Rightarrow \psi)$.
Réciproquement, supposons que $\chi \vdash_X (\varphi \Rightarrow \psi)$ est réalisé par g. On définit la fonction récursive

$$f : <m, n> \mapsto (g(m)) \cdot (n).$$

Alors, pour tout x dans X, si $m \in \chi(x)$ et $n \in \varphi(x)$, on a $f(<m, n>) \in \psi(x)$. Ainsi, f réalise $(\chi \wedge \varphi) \vdash_X \psi$. D'où le résultat. □

3.4 Définition. (quantifications) Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application de X dans Y. On note $f^* : \Sigma^Y \to \Sigma^X$ l'application définie par composition à droite par f ; c'est un foncteur de $(\Sigma^Y, \vdash_Y)$ dans $(\Sigma^X, \vdash_X)$ possédant un adjoint à gauche $\exists f : (\Sigma^X, \vdash_X) \to (\Sigma^Y, \vdash_X)$ et un adjoint à droite $\forall f : (\Sigma^X, \vdash_X) \to (\Sigma^Y, \vdash_Y)$.
Si $p^X : X \times Y \to Y$ est la projection canonique, on note $\exists x$ (resp. $\forall x$) pour $\exists p^X$ (resp. $\forall p^X$).

Démonstration. Dire que f^* est un foncteur signifie qu'il préserve l'ordre. Soient φ et ψ dans Σ^Y, et soit g réalisant $\varphi \vdash_Y \psi$. Pour x dans X, la fonction récursive g envoie un élément de $(f^*\varphi)(x) = \varphi(f(x))$ sur un élément de $(f^*\psi)(x) = \psi(f(x))$ et réalise donc $f^*\varphi \vdash_X f^*\psi$. D'où le premier résultat.
Pour la suite, on supposera de plus que f est surjective [7]. On définit ensuite les applications $\exists f, \forall f : \Sigma^X \to \Sigma^Y$ par :

$$(\exists f(\varphi))(y) = \cup_{x \in f^{-1}(\{y\})} \varphi(x) \text{ et}$$
$$(\forall f(\varphi))(y) = \cap_{x \in f^{-1}(\{y\})} \varphi(x),$$

6. On utilise (et admet) ici un cas particulier du théorème S^n_m : il existe une fonction récursive totale S^1_1 telle que, pour tout entier f et tout couple d'entier (x, y), on a $f \cdot <x, y> = S^1_1(x) \cdot y$

7. Cette hypothèse est superflue mais suffisante dans la pratique ; elle permet d'alléger légèrement la preuve.

où $\varphi \in \Sigma^X$ et $y \in Y$. On fixe $y \in Y$. On se donne deux prédicats non standards $\varphi, \psi \in \Sigma^X$ tels que $\varphi \vdash_X \psi$ et on note g une fonction récursive réalisant cette inégalité. Soit $n \in (\exists f(\varphi))(y)$, il existe alors x dans X tel que $n \in \varphi(x)$. Alors $g(n) \in \psi(x)$ et g réalise $(\exists f(\varphi))(y) \vdash_Y (\exists f(\psi))(y)$. Ceci montre que $\exists f$ est croissante (i.e. c'est un foncteur).
On montre de même que $\forall f$ est un foncteur.
Montrons que $\exists f$ est un adjoint à gauche de f^*, c'est-à-dire que, pour tous $\varphi \in \Sigma^X$ et $\psi \in \Sigma^Y$, on a

$$\exists f(\varphi) \vdash_Y \psi \text{ si, et seulement si, } \varphi \vdash_X f^*(\psi).$$

Commençons par supposer que $\exists f(\varphi) \vdash_Y \psi$ est réalisée par une fonction récursive g. Soit alors x dans X. Pour tout n dans $\varphi(x)$, on a aussi $n \in (\exists f(\varphi))(f(x))$ et donc $g(n) \in \psi(f(x)) = (f^*\psi)(x)$. Ceci montre que g réalise $\varphi \vdash_X f^*\psi$.
Réciproquement, supposons que $\varphi \vdash_X f^*\psi$ est réalisée par une fonction g. Soit alors y dans Y. Pour tout n dans $(\exists f(\varphi))(y)$, il existe un élément $x \in f^{-1}(\{y\})$ tel que $n \in \varphi(x)$ et donc $g(n) \in (f^*\psi)(x) = \psi(y)$. Ceci montre que g réalise $\exists f(\varphi) \vdash_Y \psi$. D'où le résultat.
Montrons que $\forall f$ est un adjoint à droite de f^*, c'est-à-dire que, pour tous $\varphi \in \Sigma^X$ et $\psi \in \Sigma^Y$, on a

$$f^*\psi \vdash_X \varphi \text{ si, et seulement si, } \psi \vdash_Y \forall f(\varphi).$$

Commençons par supposer que $f^*\psi \vdash_X \varphi$ est réalisée par une fonction récursive g. Soit y dans Y. Pour tout n dans $\psi(y)$ et tout x dans $f^{-1}(\{y\})$, on a $n \in \psi(f(x)) = f^*\psi(x)$ donc $g(n) \in \varphi(x)$. Ceci montre que g réalise $\psi \vdash_Y \forall f(\varphi)$.
Réciproquement, supposons que $\psi \vdash_Y \forall f(\varphi)$ est réalisée par une fonction g. Soit x dans X. Pour tout $n \in f^*\psi(x) = \psi(f(x))$, on a $g(n) \in \forall f(\varphi)$ et donc $g(n) \in \varphi(x)$. Ceci montre que g réalise $f^*\psi \vdash_X \varphi$. D'où le résultat. □

4 Le topos effectif

On commence par définir ce qui sera plus tard les objets de notre catégorie.

4.1 Définition. Un Σ-ensemble est un petit ensemble X muni d'une opération $\equiv_X : X \times X \to \Sigma$ (appelée prédicat d'égalité) telle que les formules suivantes sont valides :

1. $x \equiv_X y \Rightarrow y \equiv x$ (symétrie),
2. $(x \equiv_X y \wedge y \equiv_X z) \Rightarrow x \equiv_X z$ (transitivité).

On note $\mathrm{E}(x)$ le prédicat non-standard $x \equiv_X x$ appelé prédicat d'existence.

4.2 Lemme. *Soit $(X, \equiv_X)$ un Σ-ensemble. Alors*

$$x \equiv_X x' \Rightarrow \mathrm{E}(x) \wedge \mathrm{E}(x').$$

Démonstration. Soient s une fonction réalisant (symétrie) et t une fonction réalisant (transitivité). Pour tout entier n dans $x \equiv_X x'$, l'entier $s(n)$ est dans $x' \equiv_X x$. Ainsi $t(<n, s(n)>) \in x \equiv_X x$ et $t(<s(n), n>) \in x' \equiv_X x'$; la fonction récursive $n \mapsto <t(<n, s(n)>), t(<s(n), n>)$ réalise

$$x \equiv_X x' \Rightarrow \mathrm{E}(x) \wedge \mathrm{E}(x').$$

Dans la suite, les preuves seront données dans un style plus léger. Par exemple, une preuve de ce lemme sera : "Si $x \equiv_X x'$, alors par symétrie on a $x' \equiv_X x$. En utilisant la transitivité deux fois, on trouve $x \equiv_X x$ et $x' \equiv_X x'$. Ainsi, on a bien $\mathrm{E}(x) \wedge \mathrm{E}(x')$." Ce style (a priori informel) est justifié par le Soundness Lemma dans [4]. □

4.3 Définition. Soient $(X, \equiv_X)$ et $(Y, \equiv_Y)$ deux Σ-ensembles. Un pseudo-morphisme de $(X, \equiv_X)$ dans $(Y, \equiv_Y)$ est un élément F de $\Sigma^{X \times Y}$ tel que l'on a :

$F(x, y) \Rightarrow (\mathrm{E}(x) \wedge \mathrm{E}(y))$ (F est strict),

$(F(x, y) \wedge x \equiv_X x' \wedge y \equiv_Y y') \Rightarrow F(x', y')$ (F est relationnel),

$(F(x, y) \wedge F(x, y')) \Rightarrow y \equiv_Y y'$ (F est fonctionnel), et

$\mathrm{E}\, x \Rightarrow \exists y F(x, y)$ (F est total).

Si $F : (X, \equiv_X) \to (Y, \equiv_Y)$ et $G : (Y, \equiv_Y) \to (Z, \equiv_Z)$ sont des pseudo-morphismes, on définit la composition $G \circ F$ par :
$G \circ F(x, z) = \exists y(F(x, y) \wedge G(y, z))$ où $(x, z) \in X \times Z$.

Démonstration. Montrons que $G \circ F$ est bien un pseudo-morphisme :

1. $G \circ F$ est relationnel : On suppose que les formules $G \circ F(x, z), x \equiv_X x'$ et $z \equiv z'$ sont valides. Alors il existe un élément y de Y tel que $F(x, y)$ et $G(y, z)$. Comme F est strict, on trouve $y \equiv_Y y$. Comme G et F sont relationnels, on a aussi $F(x', y)$ et $G(y, z')$. D'où $G \circ F(x', z')$.
2. $G \circ F$ est strict : On suppose $G \circ F(x, z)$. Alors il existe y dans Y tel que $F(x, y)$ et $G(y, z)$. Ainsi, comme F et G sont stricts, on a $E(x)$ et $E(z)$.
3. $G \circ F$ est fonctionnel : On suppose $G \circ F(x, z)$ et $G \circ F(x, z')$. Alors il existe y et y' dans Y tels que $F(x, y), G(y, z), F(x, y')$ et $G(y', z')$. Comme F est fonctionnel, on trouve $y \equiv_Y y'$. Comme G est strict, on a $\mathrm{E}(z)$. Puisque G est relationnel, on a $G(y', z)$. On a bien finalement que $z \equiv_Z z'$ car G est fonctionnel.

4. $G \circ F$ est total : On suppose $\mathrm{E}(x)$. Comme F est total et strict, il existe y dans Y tel que $F(x,y)$ et $\mathrm{E}(y)$. Comme G est total, il existe z dans Z tel que $G(y,z)$. On a montré qu'il existe $z \in Z$ tel que $\exists y(F(x,y) \wedge G(y,z))$, c'est-à-dire que $\exists z(G \circ F(x,z))$.

□

4.4 Remarque. On peut *imaginer* qu'un pseudo-morphisme $F \in \Sigma^{X \times Y}$ est le graphe d'une fonction $f : X \to Y$, de sorte que $F(x, f(x))$ soit valide. En gardant ce vocabulaire imagé, si $g : X \to Y$ est une autre fonction de graphe $G \in \Sigma^{X \times Y}$, il possible que f et g soient égales point par point (i.e. $F(x, f(x)) \Leftrightarrow G(x, g(x))$ est valide) sans pour autant que f et g soient égales (i.e. $F = G$). C'est, entre autres, pour palier à ce défaut d'extensionalité que l'on introduit la relation d'équivalence suivante.

4.5 Définition. Si F et G sont des pseudo-morphismes de $(X, \equiv_X)$ dans $(Y, \equiv_Y)$, on dit que F et G sont équivalentes (et on note $F \cong G$) si la formule $F(x,y) \Rightarrow G(x,y)$ est valide. Cela définit une relation d'équivalence entre pseudo-morphismes. Cette relation est compatible avec la composition. Si f est une classe d'équivalence pour $\cong$, on notera P_f un pseudo-morphisme représentant cette classe.

Démonstration. Comme $\vdash$ est un pré-ordre, il suffit de montrer que la relation est symétrique. Supposons que $F \cong G$, c'est-à-dire $F(x,y) \Rightarrow G(x,y)$. Si $G(x,y)$, alors $\mathrm{E}(x)$ puisque G est strict. Comme F est total, il existe y' dans Y tel que $F(x,y')$. On trouve alors par hypothèse que $G(x,y')$ et, comme G est fonctionnel, on a $y \equiv_Y y'$. Enfin, comme F est relationnel, on a $F(x,y)$. D'où $G(x,y) \Rightarrow F(x,y)$ et le résultat.
La relation est compatible avec la composition. En effet, soient $F, F' \in \Sigma^{X \times Y}$ et $G, G' \in \Sigma^{Y \times Z}$ sont des pseudo-foncteurs tels que $F \cong F'$ et $G \cong G'$. On suppose $G \circ F(x,y)$, il existe alors y dans Y tel que $F(x,y)$ et $G(y,z)$. Par hypothèse, on a $F'(x,y)$ et $G'(y,z)$, d'où $G' \circ F'(x,y)$. □

4.6 Proposition-définition. *Le topos effectif* **Eff** *est la catégorie dont les objets sont les Σ-ensembles, et dont les flèches sont les classes d'équivalence des pseudo-morphismes entre Σ-ensembles.*

Démonstration. Il y a deux points à vérifier.
Si $F \in \Sigma^{X \times Y}, G \in \Sigma^{Y \times Z}, H \in \Sigma^{Z \times T}$ sont des pseudo-morphismes, alors on observe que la fonction récursive

$<<l,m>,n> \mapsto <l,<m,n>>$

réalise

$$\exists z(\exists y(F(x,y) \wedge G(y,z)) \wedge H(z,t)) \Rightarrow \exists y(\exists z(F(x,y) \wedge \exists z(G(y,z) \wedge H(z,t))).$$

Ceci montre que $H \circ (G \circ F) \cong (H \circ G) \circ F$ et la composition dans **Eff** est associative.
Si $(X, \equiv_X)$ est un Σ-ensemble, alors le prédicat d'égalité $\equiv_X \in \Sigma^{X\times X}$ est un pseudo-morphisme. On remarque que si $F \in \Sigma^{Y\times X}$ et $G \in \Sigma^{X\times Y}$ sont des pseudo-morphismes, alors les formules

$$\exists x'(x \equiv_X x' \wedge F(y, x')) \Rightarrow F(y, x) \text{ et}$$
$$\exists x'(x \equiv_X x' \wedge G(x', y)) \Rightarrow G(x, y)$$

sont valides car F et G sont stricts et relationnels. Ceci montre que $(\equiv_X \circ F) \cong F$ et $(G\circ \equiv_X) \cong G$. Ainsi la classe d'équivalence de $\equiv_X$ est l'identité de l'objet $(X, \equiv_X)$. □

Le restant de cette section est voué à la démonstration du fait que **Eff** est un topos. On commence par prouver que cette catégorie possède des produits finis.

4.7 Proposition. *Le Σ-ensemble $\{*\}$ muni de la relation triviale $\equiv_*$: $(*, *) \mapsto \mathbb{N}$ est un objet terminal dans* **Eff**. [8]

Démonstration. Soit $(X, \equiv_X)$ un Σ-ensemble quelconque. Montrons que l'unique morphisme dans $(X, \equiv_X)$ dans $(\{*\}, \equiv_*)$ est représenté par $F(x, *) = \mathrm{E}(x)$. Il est facile de vérifier que l'application F ainsi définie est un pseudo-morphisme ; ceci montre l'existence.
Soit G un pseudo-morphisme représentant un morphisme de $(X, \equiv_X)$ dans $(\{*\}, \equiv_*)$. Alors, comme G est strict, on a $G(x, *) \Rightarrow \mathrm{E}(x)$ et, comme G est total, on a $\mathrm{E}(x) \Rightarrow G(x, *)$. Ainsi $F \cong G$, d'où l'unicité. □

4.8 Proposition. *Le produit de deux objets $(X, \equiv_X)$ et $(Y, \equiv_Y)$ dans* **Eff** *est le Σ-ensemble $X \times Y$ muni de l'opération $\equiv$ définie par*

$$[(x, y) \equiv (x', y')] = [(x \equiv_X x') \wedge (y \equiv_Y y')].$$

Les projections $\pi_X : (X \times Y, \equiv) \to (X, \equiv_X)$ et $\pi_Y : (X \times Y, \equiv) \to (X, \equiv_X)$ étant respectivement représentées par

$$P_{\pi_X} : ((x, y), x') \mapsto (x \equiv_X x') \wedge \mathrm{E}(y) \text{ et}$$
$$P_{\pi_Y} : ((x, y), y') \mapsto \mathrm{E}(x) \wedge y \equiv_Y y'.$$

Démonstration. On vérifie facilement que les projections sont bien définies. Par exemple, pour la première projection :

P_{π_X} est strict : cela provient du fait que $x \equiv_X x' \Rightarrow x \equiv_X x \wedge x' \equiv_X x'$.

P_{π_X} est relationnel et fonctionnel : cela découle de la transitivité de $\equiv$.

8. On pourra considérer que le symbole $*$ désigne l'ensemble vide $\varnothing$.

P_{π_X} est total : c'est clair.

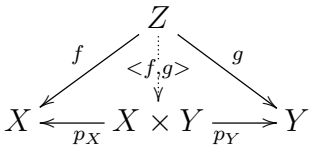
On se donne ensuite un objet $(Z, \equiv_Z)$ et deux morphismes $f : (Z, \equiv_Z) \to (X, \equiv_X), g : (Z, \equiv_Z) \to (Y, \equiv_Y)$ de **Eff**. On définit le morphisme $<f, g> : (Z, \equiv_Z) \to (X \times Y, \equiv)$ par

$$P_{<f,g>}(z, (x, y)) = P_f(z, x) \wedge P_g(z, y).$$

On vérifie facilement que cela définit bien un morphisme de **Eff**. On remarque ensuite que

$$\exists(x', y)(P_f(z, x') \wedge P_g(z, y) \wedge x \equiv_X x' \wedge \mathrm{E}(y)) \Rightarrow P_f(z, x) \text{ et}$$
$$\exists(x, y')(P_f(z, x) \wedge P_g(z, y') \wedge \mathrm{E}(x) \wedge y \equiv_Y y') \Rightarrow P_g(z, x),$$

donc on a bien $\pi_X \circ <f, g> = f$ et $\pi_Y \circ <f, g> = g$.



Pour l'unicité, on se donne un morphisme $h : (Z, \equiv_Z) \to (X \times Y, \equiv)$ vérifiant $\pi_X \circ h = f$ et $\pi_Y \circ h = g$. On a alors

$$\exists(x', y)(P_h(z, (x', y)) \wedge x \equiv_X x' \wedge \mathrm{E}(y)) \Leftrightarrow P_f(z, x) \text{ et}$$
$$\exists(x, y')(P_h(z, (x, y')) \wedge \mathrm{E}(x) \wedge y \equiv_Y y') \Leftrightarrow P_g(z, y)$$

et donc nécessairement

$$F_h(z, (x, y)) \Leftrightarrow P_f(z, x) \wedge P_g(z, y).$$

Ceci montre que $h = <f, g>$ et l'unicité. □

4.9 Proposition. *L'égaliseur de deux morphismes $f, g : (X, \equiv_X) \to (Y, \equiv_Y)$ dans* **Eff** *est le morphisme $e : (X, \equiv_e) \to (X, \equiv_X)$ où l'opération $\equiv_e$ est définie par*

$$[x \equiv_e x'] = [x \equiv_X x' \wedge \exists y(P_f(x, y) \wedge P_g(x, y))]$$

et où le morphisme e est représenté par $(x, x') \mapsto x \equiv_e x'$.

Démonstration. On vérifie facilement que le morphisme e est bien défini. Montrons que $f \circ e = g \circ e$, c'est-à-dire que

$$\exists x'(x \equiv_e x' \wedge P_f(x', y)) \Rightarrow \exists x'(x \equiv_e x' \wedge P_g(x', y)).$$

Supposons qu'il existe x' dans X tel que $x \equiv_e x'$ et $P_f(x', y)$. Par définition de $\equiv_e$, il existe y' dans Y tel que $P_f(x', y')$ et $P_g(x', y')$. Comme P_f est fonctionnel, on a $y \equiv_Y y'$ et donc, comme P_g est relationnel, on a $P_g(x', y)$. Ainsi on a bien $\exists x'(x \equiv_e x' \wedge P_g(x', y))$ et le premier résultat.

On se donne ensuite un morphisme $e' : (V, \equiv_V) \to (X, \equiv_X)$ tel que $f \circ e' = g \circ e'$. Montrons que e' se factorise à travers e. On commence par remarquer que $P_{e'}$ peut être vu comme un pseudo-morphisme (noté $P'_{e'}$) de $(V, \equiv_V)$ dans $(X, \equiv_e)$. En effet, comme $x \equiv_e x' \Rightarrow x \equiv_X x'$, la fonction est bien relationnelle et totale. Montrons qu'elle est fonctionnelle. Supposons que $P_{e'}(v, x)$ et $P_{e'}(v, x')$, alors $x \equiv_X x'$ et $x \equiv_X x$. Comme P_f et P_g sont totaux, il existe y_f et y_g dans Y tels que $P_f(x, y_f)$ et $P_g(x, y_g)$. Comme $f \circ e' = g \circ e'$, $P_{e'}(v, x)$ et $P_f(x, y_f)$, on a l'existence d'un $x'' \in X$ tel que $P_{e'}(v, x'')$ et $P_g(x'', y_f)$. Puisque $P_{e'}$ est fonctionnel, on a alors $x \equiv_X x'$ et donc $P_g(x, y_f)$ (car P_g est relationnel). On a montré que $\exists y(P_f(x, y) \wedge P_g(x, y))$ et donc $x \equiv_e x'$.
On a alors $P_{e'}(v, x) \Rightarrow \exists x'(P_{e'}(v, x') \wedge x' \equiv_e x)$, et donc $e' : (V, \equiv_V) \to (X, \equiv_X$) se factorise à travers $e : (X, \equiv_e) \to (X, \equiv_X)$ à l'aide du pseudo-morphisme $P'_{e'}$.
Si $l : (V, \equiv_V) \to (X, \equiv_e)$ est une autre factorisation de e' à travers e, alors

$$P_{e'}(v, x) \Leftrightarrow \exists x'(P_l(v, x') \wedge x' \equiv_e x)$$

et, comme

$$P_{e'}(v, x) \Leftrightarrow \exists x'(P_{e'}(v, x') \wedge x' \equiv_e x),$$

on a bien $P_l(v, x) \Leftrightarrow P_{e'}(v, x)$. La factorisation est bien unique. □

4.10 Proposition. *L'exponentielle* $(Y, \equiv_Y)^{(X, \equiv_X)}$ *de deux objets* $(X, \equiv_X)$ *et* $(Y, \equiv_Y)$ *de* **Eff** *est donné par l'ensemble* $\Sigma^{X \times Y}$ *et par l'opération* $\equiv_{\mathbf{exp}}$ *qui est définie de la manière suivante. On définit d'abord le prédicat existentiel* E *exprimant qu'une fonction* F *de* $\Sigma^{X \times Y}$ *est un pseudo-morphisme :*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(F) = \quad & \forall x, x', y, y'(F(x, y) \Rightarrow (\mathrm{E}(x) \wedge \mathrm{E}(y)) \\ \wedge \ & \forall x, y((F(x, y) \wedge x \equiv_X x' \wedge y \equiv_Y y') \Rightarrow F(x', y')) \\ \wedge \ & \forall x, y, y'((F(x, y) \wedge F(x, y')) \Rightarrow y \equiv_Y y') \\ \wedge \ & \forall x(\mathrm{E}(x)) \Rightarrow \exists y F(x, y)). \end{aligned}$$

L'opération $\equiv_{\mathbf{exp}}$ *est alors définie par*

$$\begin{aligned} F \equiv_{\mathbf{exp}} G = \quad & \mathrm{E}(F) \wedge \mathrm{E}(G) \\ & \wedge \forall x, y(F(x, y) \Rightarrow G(x, y)) \\ & \wedge \forall x, y(G(x, y) \Rightarrow F(x, y)), \end{aligned}$$

elle exprime le fait que les deux applications F et G sont des pseudo-morphismes équivalents.

Démonstration. On se donne $\mathbf{X} = (X \equiv_X), \mathbf{Y} = (Y \equiv_Y), \mathbf{Z} = (Z \equiv_Z)$ trois objets de **Eff**. Montrons qu'il existe une bijection naturelle

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Eff}}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Eff}}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}^{\mathbf{Y}}).$$

On fixe φ une bijection de l'ensemble $\Sigma^{(X\times Y)\times Z}$ dans $(\Sigma^{Y\times Z})^X$. Soit F un pseudo-morphisme de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ dans $\mathbf{Z}$. On note $\Psi(F) \in \Sigma^{X\times\Sigma^{(Y\times Z)}}$ le pseudo-morphisme défini par

$$\Psi(F)(x, G) = (\varphi(F)(x) \equiv_{\mathbf{exp}} G) \wedge \mathrm{E}(x).$$

En remarquant que, pour tout x dans X, l'application $\varphi(F)(x)$ est un pseudo-morphisme, on voit facilement que $\Psi(F)$ est bien un pseudo-morphisme et qu'il ne dépend pas de la classe d'équivalence de F.
Ceci définit une application

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Eff}}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Eff}}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}^{\mathbf{Y}}).$$

Réciproquement, si $H \in \Sigma^{X\times\Sigma^{(Y\times Z)}}$ est un pseudo-morphisme, on va définir $\Psi^{-1}(H)$. Soit x dans X, il existe par hypothèse un élément $G \in \Sigma^{Y\times Z}$ (nécessairement un pseudo-morphisme puisque H est strict) tel que $H(x, G)$. Cela permet de définit une application f dans X dans $\Sigma^{Y\times Z}$ (définie de manière quelconque lorsque l'on n'a pas $\mathrm{E}(x)$). On définit alors le pseudo-morphisme $\Psi^{-1}(H)$ par

$$\Psi^{-1}(H)((x, y), z) = \varphi^{-1}(f)((x, y), z) \wedge \mathrm{E}(x).$$

On vérifie que cela définit la bijection réciproque ψ^{-1}. □

Expliquons maintenant pourquoi **Eff** possède un classificateur de sous-objets. Afin de ne pas rallonger ce papier, nous admettons le lemme suivant dont la preuve fait appel à la construction canonique d'un pullback à l'aide d'un égaliseur.

4.11 Lemme. *Un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} (P, \equiv_P) & \xrightarrow{l} & (Y, \equiv_Y) \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (X, \equiv_X) & \xrightarrow[f]{} & (Z, \equiv_Z) \end{array}$$

est un pullback dans **Eff** *si, et seulement si, le morphisme canonique*

$$<k, l> : (P, \equiv_P) \to (X \times Y, \equiv)$$

est un monomorphisme et

$$P_f(x,z) \wedge P_g(y,z) \Rightarrow \exists p(P_k(p,x) \wedge P_l(p,y))$$

est valide.

4.12 Proposition. *La catégorie* **Eff** *possède un classificateur de sous-objets* $\top : 1 \rightarrowtail \Omega$ *où* $\Omega = (\Sigma, \equiv_\Sigma)$ *avec*

$$[A \equiv_\Sigma B] = [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] \text{ et}$$
$$P_\top(*, A) = [A \equiv_\Sigma \mathbb{N}].$$

Démonstration. Soit $\sigma : S \rightarrowtail (X, \equiv_X)$ un sous-objet. On note, pour x dans X,

$$\mathcal{S}(x) = \exists y(P_\sigma(y,x)).$$

Le morphisme $\chi_S : (X, \equiv_X) \to \Omega$ qui correspond au sous-objet est représenté par

$$P_{\chi_S} : (x, A) \mapsto \mathrm{E}(x) \wedge (\mathcal{S}(x) \equiv_\Sigma A).$$

Comme on a

$$A \Leftrightarrow \mathbb{N} \equiv A,$$

le lemme précédent 4.11 permet de montrer que le diagramme suivant est un pullback.

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{!_S} & \mathbf{1} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \top} \\ X & \longrightarrow & \Omega \end{array}$$

Montrons l'unicité de χ_S. On suppose que F est un pseudo-morphisme de $(X, \equiv_X)$ dans Ω représentant un morphisme faisant commuter le diagramme précédent. A l'aide du lemme précédent 4.11, on peut montrer que

$$F(x,A) \wedge A \Rightarrow \mathcal{S}(x) \text{ et}$$
$$F(x,A) \wedge \mathcal{S}(x) \Rightarrow A.$$

En utilisant la structure de pré-algèbre de Heyting 3.3, on a alors

$$F(x,A) \vdash (A \Rightarrow \mathcal{S}(x)) \wedge (\mathcal{S}(x) \Rightarrow A)$$

et donc

$$F(x,A) \Rightarrow P_{\chi_S}(x,A).$$

Ceci montre que χ_S est unique. □

On a ainsi démontré l'important résultat suivant.

4.13 Théorème. *La catégorie* **Eff** *est un topos (élémentaire).*

On termine cette section en montrant que le topos effectif possède un objet des entiers naturels.

4.14 Proposition. *La catégorie* **Eff** *possède un objet des entiers naturels* $(\mathbf{N}, 0, S)$ *où* $\mathbf{N}$ *est le* Σ*-ensemble* $\mathbb{N}$ *muni de l'opération définie par*

$$[m \equiv_{\mathbb{N}} n] = \{m\} \cap \{n\},$$

et où l'application zéro $0 : \mathbf{1} \to \mathbf{N}$ *est représentée par*

$$P_0 : (*, n) \mapsto n = 0$$

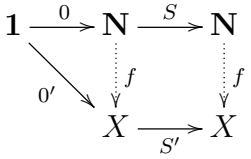
et l'application successeur $S : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *est représentée par*

$$P_S : (m, n) \mapsto (m + 1 \equiv_{\mathbb{N}} n).$$

Démonstration. On vérifie facilement que l'objet est bien défini. On se donne ensuite un objet $(Y, \equiv_Y)$ de **Eff**, et deux morphismes $0' : \mathbf{1} \to (Y, \equiv_Y)$ et $S' : (Y, \equiv_Y) \to (Y, \equiv_Y)$. On définit alors un morphisme $f : \mathbf{N} \to (Y, \equiv_Y)$ représenté par

$$P_f : (n, y) \mapsto \mathrm{E}(n) \wedge \exists y'(P_{0'}(*, y') \wedge P_{S'^n}(y', y))$$

où S'^n est la n-ième composée de S' avec elle-même. On voit facilement que P_f est fonctionnel. Montrons que le diagramme



commute.
Pour montrer que $0' = f \circ 0$, il suffit de montrer que

$$P_{0'}(*, y) \Rightarrow \exists n(P_0(*, n) \wedge P_f(n, y))).$$

Supposons $P_{0'}(*, y)$, alors $\mathrm{E}(y)$ et donc $P_f(0, y)$ (puisque $\mathrm{E}(0)$). Comme on a aussi $P_0(*, 0)$, on a le résultat.
Montrons que $S' \circ f = f \circ S$. Il suffit pour cela de prouver que

$$\exists y'(P_f(n, y') \wedge P_{S'})(y', y)) \Rightarrow \exists n'(P_S(n, y') \wedge P_f(n', y)).$$

Supposons qu'il existe y' dans Y tel que $P_f(n, y')$ et $P_{S'}(y', y))$. On a alors que $P_f(n+1, y)$ et, comme $P_S(n, n+1)$, le résultat.
Montrons que f est l'unique morphisme faisant commuter le diagramme ci-dessus. Supposons que $g : \mathbf{N} \to (Y, \equiv_Y)$ fasse commuter le diagramme. On a par hypothèse que

$$P_f(0, y) \Leftrightarrow P_g(0, y),$$
$$P_f(n+1, y) \Leftrightarrow \exists x'(P_f(n, x') \wedge P_S(x', x)) \text{ et}$$
$$P_g(n+1, y) \Leftrightarrow \exists x'(P_g(n, x') \wedge P_{S'}(x', x))$$

sont valides. Ceci permet alors de construire une fonction récursive réalisant $P_f(n, x) \Rightarrow P_g(n, x)$. Ainsi $f = g$.

□

5 Remarques finales

Le topos effectif possède de nombreuses propriétés qui le rendent intéressant dans de nombreux domaines comme en théorie de la réalisabilité ou celle des fonctions récursives. Le topos effectif se rapproche beaucoup de la catégorie des ensembles. Des formes affaiblies de l'axiome du choix y sont vraies. Ceci permet, à partir de l'objet des entiers naturels, de construire un objet des nombres réels en adaptant la construction des nombres réels via les coupures de Dedekind ou des suites de Cauchy. Cet objet des nombres réels est donné par $(\mathbb{R}_{\mathbf{rec}}, \equiv)$ où $\mathbb{R}_{\mathbf{rec}}$ est l'ensemble des nombres réels récursifs (i.e les limites réelles de suites de Cauchy récursives) et où $n \in r \equiv r'$ si, et seulement si, les réels r et r' sont égaux, et n code une suite de Cauchy convergeant vers r. L'analyse dans le topos effectif correspond à l'*analyse récursive*. On peut y démontrer l'important théorème de Brouwer affirmant que toute application de $\mathbb{R}_{\mathbf{rec}}$ dans lui-même est continue. On peut aussi construire un objet des nombres complexes dans **Eff** et montrer que le théorème fondamental de l'algèbre y est vrai. Cela peut se traduire par le fait qu'un polynôme à coefficients récursifs possède des racines calculables récursivement.
Plus généralement, le topos effectif est un cas particulier d'algèbre combinatoire partielle (abrégé PCA). Si Λ est une PCA, on peut développer une théorie des prédicats $\mathcal{P}(\Lambda)$-valués et lui associer un **Ens**-tripos donné par

$$X \mapsto (\mathcal{P}(\Lambda)^X, \vdash_X)$$

$$f \mapsto f^*,$$

c'est-à-dire un foncteur de la catégorie des ensembles dans celle des pré-algèbres de Heyting vérifiant certaines propriétés. A partir de ce **Ens**-tripos on peut alors construire un topos (ce procédé est appelé tripos-to-topos construction). Dans le cas où $\Lambda = \mathbb{N}$, on retrouve alors le topos effectif **Eff**.

Références

[1] M. Artin, A.Grothendieck, J.-L Verdier, N.Bourbaki, P. Deligne, and B. Saint-Donat. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1 (SGA4)*.

[2] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra. Volume 1. Basic Category Theory*. 1994.

[3] F. Borceux. *Handbook of Categorical Algebra. Volume 3. Catgories of Sheaves*. 1994.

[4] J.M.E Hyland. *The Effective Topos*. 1982.

[5] P.T. Johnstone. *Sketches of an Elephant. Volume 1 and Volume 2*. 2002.

[6] M. Kashiwara and P. Schapira. *Categories and Sheaves*. 2006.

[7] R. P. Kostecki. *An Introduction to Topos Theory*. 2011.

[8] J. Lambek and P.J. Scott. *Introduction to higher order categorical logic*. 1986.

[9] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. 1998.

[10] S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory*. 1992.

[11] J.V. Oosten. *Realizability : An Introduction to its Categorical Side*. 2008.

[12] T. Streicher. *Realizability*. 2008.

[13] S. Vermeeren. *Realizability toposes*. 2009.